

Algebra und Zahlentheorie.

Dieudonné, J.: Sur les polynomes dont toutes les racines sont intérieures au cercle unité. Bull. Sci. math., II. s. **56**, 176—178 (1932).

Sind die Nullstellen eines Polynoms $f(x)$ alle absolut ≤ 1 , so ist dies bekanntlich auch bei der Ableitung der Fall. Dann ist also der Differentialausdruck $f'/f - f''/f'$ für $|x| > 1$ regulär. Der Verf. beweist, daß

$$\left| \frac{f'}{f} - \frac{f''}{f'} \right| \leq \frac{1}{|x| - 1} \quad (|x| > 1)$$

ist, daß also eine nur von $|x|$ abhängige universelle Schranke für den Absolutbetrag dieses Ausdrucks existiert. Nach Integration der Ungleichung längs einer auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegenden Strecke ergibt sich leicht der Satz, daß $(|x| - 1)|f'(x)/f(x)|$ bei festem Arkus von x mit zunehmendem $|x|$ für $|x| > 1$ nicht abnehmen kann. Die obige Ungleichung ist scharf. Das Gleichheitszeichen tritt bei den Funktionen $\text{const.} (x - \varepsilon)^n$, ($|\varepsilon| = 1, n = 1, 2, \dots$) ein. K. Löwner (Prag).

Bays, S.: Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier de la forme $6n + 1$. Comment. math. helv. **4**, 183—194 (1932).

In einer früheren Arbeit über denselben Gegenstand (dies. Zbl. **2**, 182; ferner **1**, 264; **3**, 100) zeigt der Verf., daß die Anzahl und die Art der verschiedenen Tripelsysteme, die durch ein Charakteristikensystem Σ , das zum Teiler d von $3n$ gehört, bestimmt sind, für $d = 1$ und $d = 3$ von der Lösung der folgenden Gleichung abhängt:

$$2^{n-a-1} = \mu'_1 x_1 + \mu'_2 x_2 + \dots + \mu'_k x_k,$$

wo $n = 2^a n'_1$, $n'_1 \geq 1$ und ungerade, $a \geq 0$ und ganz; ferner $\mu'_1 = 1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_{k-1}, \mu'_k = n'_1$ die Teiler von n'_1 . Über die Lösung (x_1, x_2, \dots, x_k) werden Sätze hergeleitet, die die Existenz gewisser Untergruppen behaupten. Speziell wird der Fall $n = 2^a p$ ($p = \text{Primzahl}$) behandelt. J. J. Burckhardt (Zürich).

Parker, W. V.: A theorem on symmetric determinants. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 545—550 (1932).

Verf. beweist den folgenden Satz: „Wenn $D = |a_{ij}|$ eine symmetrische Determinante von der Ordnung n , $n > 5$, in der $a_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist, und M irgendeinen Hauptminor der Ordnung $n - 1$ bezeichnet, ferner alle Hauptminoren der vierten Ordnung von D , die nicht zugleich Minoren von M sind, verschwinden, so hat auch D den Wert 0.“ Wegner (Darmstadt).

● **Rutherford, D. E.:** Modular invariants. (Cambridge tracts in math. a. math. phys. Nr. 27.) London: Cambridge Univ. press 1932. VIII, 84 S. 6/-.

Es handelt sich um eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen von Dickson, Glenn, Hazlett, Sanderson und anderen über die Invariantentheorie der linearen Gruppen unter Zugrundelegung eines Galois-Feldes (GF.) als Grundkörper. Die Untersuchungen betreffen drei Arten von Invarianten: die kongruenten Invarianten, wobei sowohl die Formenkoeffizienten als die Transformationskoeffizienten Unbestimmte sind; die formalen Invarianten, wobei die Formenkoeffizienten Unbestimmte, die Transformationskoeffizienten aber Elemente von GF. sind, und die residualen Invarianten (sonst modulare genannt), wobei alle Größen aus GF. entnommen werden. (Der Autor schreibt „komplexe Zahlen“ statt „Unbestimmte“; jedoch ergeben die Definitionen dann keinen richtigen Sinn, da man komplexe Zahlen mit Größen aus GF. nicht multiplizieren kann.) Die kongruenten Invarianten erhält man aus gewöhnlichen ganzzahligen Invarianten, indem man sie mod p nimmt;

jedoch ist bis jetzt nur im binären Fall bewiesen, daß man so alle erhält. Die formalen Invarianten werden mit Hilfe einer symbolischen Zerlegung der Formen gewonnen. Die residualen Invarianten gewinnt man entweder nach Dickson mit Hilfe einer Klasseneinteilung der Formen in GF. oder nach Sanderson aus den formalen Invarianten durch Spezialisierung der unbestimmten Formenkoeffizienten. — Der zweite Teil bringt den allgemeinen Endlichkeitsbeweis der Invarianten endlicher Gruppen nach E. Noether mit Hilfe der Theorie der Ringe und Körper. *van der Waerden*.

Todd, J. A.: A note on the linear fractional group. J. London Math. Soc. **7**, 195 bis 200 (1932).

Für die unimodulare, lineare, gebrochene Substitutionsgruppe modulo p wird eine neue abstrakte Definition gegeben. Sei a eine primitive Wurzel der Kongruenz $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, dann ist diese Gruppe durch die Relationen

$$S^p = R^{1(p-1)} = U^3 = (US)^2 = (UR)^2 = E, \quad RS = S^a R$$

definiert, falls p eine Primzahl der Form $4n - 1$ ist; falls p von der Form $4n + 1$ ist, tritt noch $(S^a R U)^3 = E$ hinzu. Hier bedeuten $S: x' = x + 1$; $U: x' = -1/(x - 1)$; $R: x' = a^2 x + 1$. Für $p = 11$ sieht man aus dieser Definition, daß die G_{660} Ikosaederuntergruppen besitzt, eine wird durch R und U mit $R^5 = U^3 = (UR)^2 = E$ gegeben.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Albert, A. Adrian: On normal simple algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 620 bis 625 (1932).

Eine Algebra \mathfrak{A} über einem (kommutativen) Körper F der Charakteristik Null heißt assoziiert mit einer ebensolchen \mathfrak{B} , $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn \mathfrak{A} direktes Produkt $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{B}$ von \mathfrak{B} und einem vollen Matrizenring \mathfrak{M} über F wird. Insbesondere ist nach Wedderburn eine normale einfache Algebra \mathfrak{A} assoziiert mit einer normalen Divisionsalgebra \mathfrak{D} , $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{D}$; hat diese die Ordnung m^2 (Grad m), so heißt m der Index und der Grad des zugehörigen \mathfrak{M} der Koindex von \mathfrak{A} . Sei die normale einfache Algebra \mathfrak{A} assoziiert mit der normalen Divisionsalgebra \mathfrak{D} ; Z bedeute eine algebraische Erweiterung vom Range r über F . Dann heißt \mathfrak{A} eine Darstellung von Z durch \mathfrak{D} , wenn \mathfrak{A} einen zu Z isomorphen Unterkörper enthält. Zu vorgegebenem Z und \mathfrak{D} gibt es immer Darstellungen, insbesondere existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte kleinste Darstellung $\mathfrak{B} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{D}$, deren Koindex der Quotientenindex $q = q(\mathfrak{D}, Z)$ von Z und \mathfrak{D} heißt. Das Hauptresultat der Arbeit besteht nun in folgendem Satz: Jede Darstellung \mathfrak{A} von Z durch \mathfrak{D} ist assoziiert mit einer kleinsten Darstellung \mathfrak{B} , d. h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{S} \times (\mathfrak{E} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{M} \times \mathfrak{D}$; dabei sind $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{E}$ und \mathfrak{E} volle Matrizenringe über F . Der Quotientenindex q ist ein Teiler von r , $r = sq$, und $\mathfrak{D}' = Z \times \mathfrak{D}$ ist eine Divisionsalgebra vom Grade $m' = m/s$ über Z . Ist Z_0 aus \mathfrak{A} ein mit Z isomorphes Teilsystem, so ist die Algebra aller mit Z_0 vertauschbaren Elemente von \mathfrak{A} eine normale einfache Algebra $\mathfrak{S} \times \mathfrak{D}_0$ über Z_0 , wobei \mathfrak{D}_0 zu \mathfrak{D}' unter Erhaltung des Isomorphismus $Z \leftrightarrow Z_0$ isomorph ist. — Mit Hilfe dieses Resultates wird eine von L. E. Dickson aufgestellte Vermutung über eine gewisse Klasse normaler einfacher Algebren \mathfrak{E} allgemein bestätigt: die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein solches \mathfrak{E} Divisionsalgebra ist, besteht darin, daß ein bestimmtes Element einer in \mathfrak{E} enthaltenen gewissen Divisionsalgebra \mathfrak{D} nicht Norm eines Elementes aus \mathfrak{D} sein darf.

Grell (Jena).

Albert, A. Adrian, and Helmut Hasse: A determination of all normal division algebras over an algebraic number field. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 722—726 (1932).

Für den zuerst von R. Brauer, H. Hasse und E. Noether bewiesenen Satz, daß jede über einem endlichen algebraischen Zahlkörper normale Divisionsalgebra zyklisch ist, werden hier noch zwei weitere Beweise gegeben. Man benötigt für sie dank einer schon früher von H. Hasse durchgeführten Reduktion des Problems allein noch den folgenden Hilfssatz, für den zwei verschiedene, auf den algebraischen Resultaten von A. Albert und den arithmetischen von H. Hasse fußende Herleitungen

mitgeteilt sind: Eine normale Divisionsalgebra D vom Grade m über dem endlichen algebraischen Zahlkörper F zerfällt nur dann für jede Primstelle von F , wenn $D = F$ wird.

Grell (Jena).

MacDuffee, C. C.: Ideals in linear algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 841—853 (1931).

In this paper, the writer reviews the recent developments of the theory of ideals in a linear algebra. The author points out that in the set G of all integral matrices of order n , the unique factorization law holds; also that every set of integral elements in an associative algebra of order n is equivalent to a sub-set of G . He then raises the question as to whether or not the problem of enlargement (usually attempted by the introduction of ideals) to attain unique factorization has not been already solved.

Latimer (Lexington).

Gut, Max: Über die Primidealzerlegung in gewissen relativ-ikosaedrischen Zahlkörpern. Comment. math. helv. **4**, 219—229 (1932).

Sei K ein relativ-ikosaedrischer Zahlkörper über einem Körper k , der die 5. Einheitswurzeln enthält. Für die zu 30 und zur Relativdiskriminante teilerfremden Primideale aus k bestehen nach Artin 4 verschiedene Möglichkeiten des Zerfallens in K . In der vorliegenden Arbeit werden nun mit Hilfe der Koeffizienten einer K erzeugenden Normalgleichung notwendige und hinreichende Kriterien aufgestellt, die für jedes Primideal aus k den Zerlegungstypus zu bestimmen gestatten.

Grell (Jena).

Grunwald, W.: Charakterisierung des Normenrestsymbols durch die \mathfrak{p} -Stetigkeit, den vorderen Zerlegungssatz und die Produktformel. Math. Ann. **107**, 145—164 (1932).

In Verallgemeinerung eines von Hasse [J. reine angew. Math. **155** (1926)] für absolut quadratische Körper bewiesenen Satzes wird gezeigt, daß das Normenrestsymbol

$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$, wenn α eine von 0 verschiedene Zahl und \mathfrak{p} eine Primstelle aus einem algebraischen Zahlkörper k , K einen relativ Abelschen Oberkörper bezeichnet, durch folgende drei Eigenschaften gekennzeichnet ist: 1. \mathfrak{p} -Stetigkeit: Es gibt eine Potenz \mathfrak{p}^* , so daß $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist für alle Zahlen des Strahles mod \mathfrak{p}^* . 2. Vorderer Zerlegungssatz: $\left(\frac{\alpha_1, K}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_2, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2, K}{\mathfrak{p}}\right)$. 3. Produktformel $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Es wird nämlich

bewiesen, daß es zu jeder Funktion $\chi_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ mit den obigen Eigenschaften, deren Wertevorrat nur die Elemente der Gruppe K/k sind, eine Folge von Körpern K_n gibt, deren Relativgruppen K_n/k zur Relativgruppe von K isomorph sind, so daß bei geeigneter Limesdefinition $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha, K_n}{\mathfrak{p}}\right) = \chi_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ ist.

Taussky (Wien).

Hensel, Kurt: Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. II. Abh. J. reine angew. Math. **168**, 117—128 (1932).

Zweck der Arbeit ist eine neue, ausführliche Begründung der Theorie der Primdivisoren erster Art und der aus ihnen zusammengesetzten Divisoren für einen Körper Ω von algebraischen Funktionen in endlich vielen Unbestimmten u_i . Diese Theorie gipfelt bekanntlich in dem Hauptsatz: Jeder Funktion von Ω läßt sich ein aus Potenzen endlich vieler „Primdivisoren“ bestehender Divisor $\mathfrak{P}_1^{a_1} \dots \mathfrak{P}_r^{a_r}$ so zuordnen, daß 1. die Funktion durch ihren Divisor bis auf eine Konstante als Faktor eindeutig bestimmt ist und 2. dem Produkt zweier Funktionen stets das Produkt der zugehörigen Divisoren entspricht. Für die Divisoren erster Art bestehen also in Ω ganz ebenso einfache Gesetzmäßigkeiten wie für die Divisoren eines Körpers algebraischer Funktionen in einer Veränderlichen, während dagegen bei den hier nicht in Betracht gezogenen, aber für viele Anwendungen wichtigen Divisoren niedrigerer Dimension wesentliche Abweichungen und Schwierigkeiten auftreten. — Bei der Herleitung der angegebenen Ergebnisse kann man verschiedene Wege einschlagen, von denen vor allem drei in der Literatur bereits mehr oder weniger ausführlich beschrieben worden sind. Zwei dieser Wege gehen aus von der Idealtheorie des Ringes \mathfrak{o} aller in den Unbestimmten u_i ganzen algebraischen Funktionen von Ω ; sie unterscheiden sich durch die Art, wie die in \mathfrak{o} auftretenden Ideale niedrigerer Dimension fortgeschafft werden. Man kann nämlich einmal mit Kronecker von \mathfrak{o} zu dem zugehörigen Funktionalbereich $\mathfrak{o}_{\mathfrak{K}}$ übergehen, in dem jedes Ideal in ein Potenzprodukt von Primidealen

zerlegbar ist, und den Primidealen von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ je einen Primdivisor entsprechen lassen. Man kann aber auch andererseits für die Ideale von \mathfrak{o} den Artinschen Äquivalenzbegriff zugrunde legen und die Tatsache benützen, daß jedes Ideal aus \mathfrak{o} einem Potenzprodukt von Primidealen äquivalent ist. Schließlich eröffnet die Bewertungstheorie einen dritten Weg, dessen Zusammenhang mit den Artinschen Gedankengängen besonders von Krull näher dargelegt worden ist. — Die vorliegende Arbeit führt eine weitere Methode durch, die durch frühere Untersuchungen des Verf. über algebraische Zahlen- und Funktionentheorie in einer Veränderlichen (Math. Z. 2 u. 4) schon nahegelegt worden war. Sie knüpft an die Idee der p -adischen Reihenentwicklung an, wobei p hier ein Primpolynom in den Unbestimmten u_i bedeutet. Zur Definition der aus p hervorgehenden Primdivisoren \mathfrak{P}_j wird eine definierende Gleichung $G(z) = 0$ von Ω betrachtet, und zwar werden die \mathfrak{P}_j mit Hilfe der p -adischen bzw. π -adischen Reihenentwicklungen sämtlicher Wurzeln von $G(z) = 0$ erklärt. Das entspricht offenbar dem in der Theorie der analytischen Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen üblichen Verfahren, bei dem man die über der Stelle $x = \alpha$ der komplexen Ebene gelegenen Punkte der Riemannschen Fläche von $f(x)$ durch die verschiedenen nach Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitenden Funktionselemente von $f(x)$ definiert. Auf der anderen Seite steht aber dieses Vorgehen bekanntlich auch in enger Beziehung zur Bewertungstheorie. — Die Darstellung baut die Theorie von Grund an auf und folgt dabei im wesentlichen den schon angeführten früheren Arbeiten des Verf., denen gegenüber neue Schwierigkeiten hier nicht auftreten. Die der Einfachheit halber vorgenommene Beschränkung auf zwei Unbestimmte und auf den Körper aller komplexen Zahlen als Konstantenkörper ist unerheblich. Abgesehen von dem zum Schluß geführten Konvergenzbeweis für die benutzten Reihen, der natürlich nur bei einem Zahlkörper als Konstantenkörper Sinn hat, gilt alles entsprechend für eine beliebige endliche Anzahl von Unbestimmten und für einen beliebigen Körper der Charakteristik 0 als Konstantenkörper. (I. vgl. dies. Zbl. 2, 119.)
F. K. Schmidt (Erlangen).

Heegner, Kurt: Über eine algebraische Aufgabe, welche in der Reduktions- und Transformationstheorie der algebraischen Funktionen auftritt. J. reine angew. Math. 168, 91–105 (1932).

Die behandelte Aufgabe lautet: Über dem Körper $K(h)$ aller rationalen Funktionen in der Veränderlichen h mit komplexen Koeffizienten sei eine irreduzible Gleichung $f(x, h) = 0$ vom Grade ν mit den Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ gegeben, deren Galois-Gruppe als Permutationsgruppe der Wurzelindizes geschrieben gleich \mathfrak{G} ist. H bedeute eine zweite, von h unabhängige Veränderliche, und $F(X, H) = 0$ eine über $K(H)$ gegebene irreduzible Gleichung ν -ten Grades mit den Wurzeln A_1, \dots, A_ν , deren Galois-Gruppe als Permutationsgruppe der Wurzelindizes geschrieben ebenfalls gleich \mathfrak{G} ist. Man bestimme alle gemeinsamen Oberkörper $L = K(h, H; q)$ von $K(h)$ und $K(H)$, über denen $f(x, h)$ und $F(X, H)$ die Galois-Gruppe \mathfrak{G} behalten und gleichzeitig $F(X, H)$ als Tschirnhaus-Transformierte von $f(x, h)$ aufgefaßt werden kann, also $L(\alpha_1) = L(A_p)$ ist. Dabei kann man sich offenbar von vorneherein auf solche Körper L beschränken, die in dem Kompositum von $K(h; \alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ und $K(H; A_1, \dots, A_\nu)$ enthalten sind. — Diese Aufgabe wird mit Hilfe der Galoisschen Theorie auf eine näher erörterte gruppentheoretische Frage zurückgeführt, und es wird die Galois-Gruppe der Gleichung $\Phi(y, h, H) = 0$ untersucht, der das primitive Element q des Körpers L genügt. Zum Schluß geht Verf. besonders auf den Fall $F = f(X, H)$ ein, der für Anwendungen in der algebraischen Funktionentheorie wichtig ist. Dabei werden einmal die Eigenschaften der Gleichung $\Phi(y, h, H) = 0$ im Falle der Koinzidenz von h und H besprochen, ferner werden die Bedingungen angegeben, unter denen $\Phi(y, h, H) = 0$ in eine in h und H symmetrische Gleichung transformiert werden kann.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Turnbull, H. W.: Note on continued fractions and the sequence of natural numbers. Math. Notes Nr 27, IX–XIII (1932).

Etherington, I. M. H.: A simple method of finding sums of powers of the natural numbers. Math. Notes Nr 27, XVI–XIX (1932).

Corput, J. G. van der, und G. Schaake: Über den Viggo Brun'schen Algorithmus zur Bestimmung der n -ten Primzahl. Norske Vid. Selsk., Forh. 5, 36–37 (1932).

Bewiesen wird, daß dieser Algorithmus (dies. Zbl. 3, 101, 149) in jeder wachsenden Folge von natürlichen Zahlen anwendbar ist. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Ricei, Giovanni: On a generalization of the Wilson-Glaisher theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 393—397 (1932).

Glaisher (Quart. J. Math., Oxford Ser. **31**, 23) hat bewiesen: $A_{p-1} \equiv -[n/p] \pmod{p}$, wenn p eine Primzahl $\leq n$ ist und A_r die Summe von allen Produkten von r natürlichen Zahlen $< n$. Dieser Satz ist von Moritz (Tôhoku Math. J. **28**, 198) erweitert worden. Verf. beweist nun einen sehr komplizierten Satz, welcher diese beiden als besondere Fälle enthält.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Sivasankaranarayana Pillai, S.: On the indeterminate equation $x^y - y^x = a$. Annamalai Univ. J. **1**, 59—61 (1932).

Auf elementarem Wege wird nachgewiesen: Bedeutet $N(a)$ bzw. $N'(a)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen $x > 1, y > 1$ von

$$0 < x^y - y^x \leq a \quad \text{bzw.} \quad x^y - y^x = a \quad (1)$$

für ganzes $a > 0$ und ist $\delta > 0$ eine feste Zahl, so ist

$$N(a) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\log a}{\log \log a} \right)^2 \quad \text{und} \quad N'(a) \leq (1 + \delta) \frac{\log a}{\log \log a} \quad (a > a_0(\delta)).$$

Wie Ref. an anderer Stelle beweisen wird, kann man die Abschätzung für $N'(a)$ verschärfen.

J. F. Koksma (Hilversum).

Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann. III. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 133—141 (1932).

Ein überaus einfacher Beweis der Inghamschen Abschätzung:

$$\int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt = T \log T - (1 + \log 2\pi - 2\gamma)T + O(T^{\frac{1}{2}} \log T),$$

γ Eulersche Konstante. (II. vgl. dies. Zbl. **3**, 246.) *A. Walfisz* (Radość, Polen).

Bernstein, Vladimir: Sur l'ultraconvergence d'une classe de séries de Dirichlet. Comment. math. helv. **4**, 21—50 (1932).

Soit la série $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ dont l'axe de convergence est fini et supposons que $\{\lambda_n\}$ possède une densité maximum finie. Soit H son axe d'holomorphie ($f(s)$ est holomorphe pour $\sigma > H + \varepsilon$ mais n'est pas holomorphe dans le demi-plan $\sigma > H - \varepsilon$, ($s = \sigma + it$)). On peut choisir une suite n_i telle que $n_{i+1} - n_i < \varepsilon \lambda_{n_i+1}$, $\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i+1} < \varepsilon \lambda_{n_i+1}$ quel que soit $\varepsilon > 0$ à condition que i soit assez grand, et telle que la suite

$$S_{n_i} \quad \text{où} \quad S_{n_i} = \sum_{n=1}^{n_i} a_n e^{-\lambda_n s},$$

converge uniformément dans chaque Δ fermé intérieur à $\sigma > H$ (ultraconvergence serrée). La démonstration de ce beau théorème s'appuie essentiellement sur l'égalité:

$$a_n = \varphi(\lambda_n)/C'(\lambda_n) \quad \text{où} \quad C(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

$$\varphi(z) = -C(z) \int_0^\infty f(s) e^{sz} ds \quad \left(s = \varrho e^{i\theta}, 0 \leq \varrho \leq \infty, \theta \text{ fixe: } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right);$$

on arrive ainsi à l'égalité $S_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} dz$ où C_n est un certain triangle. En

s'appuyant ensuite sur quelques résultats de M. Carlson on a assez facilement le théorème. D'ailleurs, on peut choisir une suite n_k telle qu'en posant:

$$P_k(s) = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} a_n e^{-\lambda_n s} = A_k(s) e^{-\lambda_{n_k+1} s},$$

l'axe de convergence de $\sum A_k(s) e^{-\lambda_{n_k+1} s}$ soit confondu avec H . Signalons, aussi, que l'auteur généralise le théorème de M. Ostrowski concernant l'ultraconvergence des séries lacunaires sur l'axe de convergence, en remplaçant dans ce théorème le mot «axe de convergence» par «axe d'holomorphie». *S. Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Wallisz, Arnold: Zur Theorie der diophantischen Näherungen. C. R. Soc. Sci. Varsovie **24**, 116–122 (1932).

Satz. Für reelles u sei $\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$; θ sei eine reelle Irrationalzahl mit beschränkten Kettenbruchennern. Dann ist

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n\psi(n\theta)} = O(\log x). \quad (1)$$

Beweis. Q sei der größte ungerade Näherungsnenner von θ , der $\leq x$ ist. Die Fourierentwicklung von $\psi(u)$ gibt (der Rest wird nach einem Hilfssatz von Behnke abgeschätzt)

$$\sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \psi(n\theta) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sin 2\pi k n \theta + O(\log x). \quad (\xi = [x]) \quad (2)$$

In (2) steht links $O(\log x)$ (Ostrowski); endlich bekommt man

$$\sum_{n=1}^{Q-1} (-1)^n \sin 2\pi k n \theta = \frac{1}{\pi \psi(k\theta)} + O\left(\frac{k}{x|\psi(k\theta)|} + 1\right)$$

(gleichmäßig für $k \geq 1$, $x > c(\theta)$). Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k\psi(k\theta)} = O\left(\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{|\psi(k\theta)|}\right) + O(\log x);$$

in Verallgemeinerung eines Hilfssatzes von Behnke ist aber

$$\sum_{k=1}^{\xi} 1/|\psi(k\theta)| = \sum_{k=1}^{\xi} 1/\{k\theta + \frac{1}{2}\} = O(x \log x)$$

(mit $\{u\} = \min(u - [u], [u] + 1 - u)$); damit ist (1) bewiesen. *Jarník* (Praha).

Popken, J.: Über eine trigonometrische Summe. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 668–680 (1932).

Es wird die Summe $S = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{2\pi i \alpha_{\nu}}$ unter folgenden Annahmen betrachtet:
 $n > 1$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$, $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$; $\Delta \alpha_{\nu} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu}$, $\Delta^2 \alpha_{\nu} = \Delta \alpha_{\nu+1} - \Delta \alpha_{\nu}$, $\Delta^3 \alpha_{\nu} = \Delta^2 \alpha_{\nu+1} - \Delta^2 \alpha_{\nu}$; $\theta \leq \Delta \alpha_{\nu} \leq \frac{1}{4}$, $\Delta^2 \alpha_{\nu} \geq 0$, $\Delta^3 \alpha_{\nu} \geq 0$. Hauptsätze:
 I. $|S| \leq a_1 \operatorname{cosec} \pi \theta$. II. S liegt im Winkelraum $x e^{2\pi i (\alpha_1 - \frac{1}{2} \Delta \alpha_1 + \nu)}$, $x > 0$, $0 < y < \frac{1}{2}$.
 III. $S = 0$ dann und nur dann, wenn $n \Delta \alpha_1$ ganz ist, $a_{\nu} > a_{\nu+1}$ nur für ganzes $\nu \Delta \alpha_1$ vorkommen kann und S die Gestalt $e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{2(\nu-1)\pi i \Delta \alpha_1}$ besitzt.

Für irrationales $\Delta \alpha_1$ ist also stets $S \neq 0$. IV. In I. gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $n\theta + \frac{1}{2}$ ganz ist, $a_{\nu} > a_{\nu+1}$ nur für ganzes $\nu\theta + \frac{1}{2}$ vorkommen kann und S die Gestalt $e^{2\pi i \alpha_1} \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{2(\nu-1)\pi i \theta}$ besitzt. Für irrationales θ gilt also stets $|S| < a_1 \operatorname{cosec} \pi \theta$. Aber V. Zu jedem irrationalen θ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zulässiges S mit $|S| > a_1 \operatorname{cosec} \pi \theta - \varepsilon$. Verf. zeigt auch, daß I. von der Annahme $a_{\nu} \neq 0$ unabhängig ist. Die Beweise werden elementargeometrisch höchst anschaulich durchgeführt.
A. Wallisz (Radość, Polen).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

● **Moore, R. L.:** Foundations of point set theory. (Americ. Math. Soc. coll. publ. Vol. 13.) New York: Americ. Math. Soc. 1932. VII, 486 S. u. 42 Fig. geb. \$ 5.—.

In Kap. I wird zunächst der Raum S definiert, in welchem sich die sämtlichen folgenden Untersuchungen abspielen, und zwar wie üblich mit Hilfe von Axiomen betreffend die undefinierten Grundbegriffe „Punkt“ und „Umgebung“; dieser Raum ist nicht der allgemeinste topologische im Sinne von Hausdorff, jedoch kann jedes G_{δ} eines euklidischen Raumes bei geeigneter Wahl der erzeugenden Umgebungen als Raum S aufgefaßt werden. Sodann wird

eine Reihe von Sätzen über Kontinua (= abgeschlossene, zusammenhängende Mengen), Bogen (= topologische Streckenbilder), Trennung, Zerlegungspunkte (cut point), irreduzible und unzerlegbare Kontinua bewiesen. Kap. II, in welchem S der Forderung a) genügt, daß jeder Punkt P jeder offenen Menge O in einer mehrpunktigen, zusammenhängenden, offenen Menge $C \subset O$ liegt, behandelt den Zusammenhang im kleinen (z. B. wird bewiesen, daß in jeder offenen zusammenhängenden Menge je zwei Punkte durch einen Bogen verbunden werden können), die Bogen, die Bäume (im kleinen zusammenhängende Kontinua ohne einfache geschlossene Teilkurve), die zyklischen Kontinua (je zwei Punkte liegen auf einer einfach geschlossenen Teilkurve). Kap. III behandelt einen Raum S , der neben der Forderung a) den folgenden genügt: b) für jeden Punkt P ist $S - P$ zusammenhängend, c) für jede einfache geschlossene Kurve J ist $S - J$ Summe von (genau) zwei fremden, zusammenhängenden und offenen Mengen mit der Begrenzung J . In Kap. IV wird außerdem vorausgesetzt: d) wenn P, Q zwei Punkte von S sind und U eine Umgebung von P ist, so existiert eine einfache geschlossene Kurve $J \subset U$, die P und Q trennt. Beispielsweise genügt jede offene Teilmenge und jedes G_δ mit abzählbarem Komplement der Kugelfläche (oder der Ebene) den Forderungen a)—d). Nach Herleitung gewisser Anordnungssätze, in denen ein beliebig gewählter Punkt die Rolle des Unendlichfernen übernimmt und durch ihn das Äußere und Innere einer einfachen geschlossenen Kurve unterschieden werden, bringt Verf. vor allem zahlreiche Sätze über Trennung (z. B. zweier Mengen durch eine einfache geschlossene Kurve), Zerlegung (z. B. von S durch die Summe zweier Mengen, die selbst S nicht zerlegen), die Komplementärkomponenten von im kleinen zusammenhängenden Kontinua (z. B.: ist die Begrenzung einer solchen kompakt [d. h. enthält S zu jeder unendlichen Menge $C \subset B$ einen Häufungspunkt], so ist sie auch ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum), Erreichbarkeit (z. B.: ist das kompakte Kontinuum K Begrenzung einer zusammenhängenden offenen Menge und jeder Punkt von K allseitig erreichbar, so ist K im kleinen zusammenhängend). Kap. V behandelt die Theorie der oberhalb-stetigen Systeme \mathfrak{S} (oberhalb-stetig heißt ein System \mathfrak{S} von abgeschlossenen Mengen M , wenn gilt: Sind A_n und B_n Punkte einer Menge $M_n \in \mathfrak{S}$ und konvergiert die Folge $\{A_n\}$ gegen einen Punkt einer Menge $M \in \mathfrak{S}$, so enthält M zu jeder Teilfolge von $\{B_n\}$ einen Häufungspunkt). Man kann \mathfrak{S} als einen Raum betrachten, indem man die Mengen $M \in \mathfrak{S}$ als „Punkte“ und geeignete Mengen von „Punkten“ M als „offen“ auffaßt. Es handelt sich dann in erster Linie darum, die Struktur des Raumes \mathfrak{S} zu untersuchen, d. h. nachzuweisen, daß S unter geeigneten Voraussetzungen über die Mengen M im kleinen zusammenhängend ist, ein Baum ist u. dgl. Es ist zu bemerken, daß die Theorie der oberhalb-stetigen Systeme auch ihr selbst nicht unmittelbar angehörige Resultate liefert; z. B. kann man aus ihr den Whyburnschen Satz folgern, daß jedes kompakte Kontinuum höchstens abzählbarviele Zerlegungspunkte einer Ordnung > 2 (im Sinne der Kurventheorie) enthält. — Die beiden folgenden Kapitel enthalten vor allem eine topologische Charakterisierung der Kugeloberfläche bzw. der Ebene: Kap. VI. Der Raum S genügt neben den Forderungen a) und c) den folgenden: e) jeder Punkt einer offenen Menge R ist enthalten in einer zusammenhängenden offenen Menge D mit kompakter zusammenhängender Begrenzung B , so daß $D + B \subset R$; f) ist dabei $P \in Q$ ein Bogen $C \subset D + Q$ mit den Endpunkten P und Q , so ist $D + Q - P \subset Q$ zusammenhängend; g) zwei nichtkompakte Mengen können nicht durch ein kompaktes Kontinuum getrennt werden; h) S genügt dem II. Abzählbarkeitsaxiom. Vor allem wird bewiesen, daß das Innere [vgl. c)] einer einfachen geschlossenen Kurve durch zwei Bogenscharen überdeckt werden kann, so daß je zwei Bogen derselben bzw. verschiedener Scharen keinen bzw. genau einen Punkt gemein haben. Kap. VII enthält zunächst den Nachweis, daß der (früher durch innere Eigenschaften definierte) Bogen zur Strecke und die einfache geschlossene Kurve zum Kreise homöomorph sind. Jeder kompakte (bzw. nicht kompakte) Raum S , der den Forderungen a)—c) und e)—h) genügt, ist mit der Kugelfläche (bzw. der Ebene) homöomorph. *Nöbeling.*

Swingle, P. M.: Biconnected and related sets. Amer. J. Math. 54, 525—535 (1932).

Bekanntlich kann eine zusammenhängende Menge punkthaft (punktiforme) sein (d. h. kein einziges mehrpunktiges Teilkontinuum besitzen). Unter diesen punkthaften und doch zusammenhängenden Mengen bilden die von Knaster und Kuratowski eingeführten „bikonnexen“ Mengen einen wichtigen Spezialfall: das sind zusammenhängende Mengen, die nicht in zwei mehrpunktige zusammenhängende disjunkte Teilmengen zerlegt werden können (daß solche Mengen stets punkthaft sind, haben ebenfalls Knaster und Kuratowski (Fundam. Math. 2, 206—255) bewiesen). — Die zu besprechende Arbeit bildet einen weiteren Beitrag zu dieser Theorie. Es wird zunächst eine Reihe von Sätzen über punkthafte (insbesondere bikonnexe) Mengen der euklidischen Räume bewiesen. Unter diesen seien die folgenden erwähnt: 1. Keine abgeschlossene Relativumgebung einer punkthaften zusammenhängenden Teilmenge des R^n ist in der Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar-vielen einfachen Bögen enthalten (Theorem 4). 2. Ein unzerlegbares Kontinuum C kann als Vereinigungs-

menge eines Systems \mathfrak{S} von disjunkten punkthaften zusammenhängenden in C dichten Teilmengen dargestellt werden, wobei man erreichen kann, daß eine beliebige Kardinalzahl, die größer als 1 und kleiner als die Mächtigkeit des Kontinuums ist, als Mächtigkeit des Mengensystems \mathfrak{S} auftritt. 3. Ein n -dimensionaler kompakter metrischer Raum kann nicht als Summe von höchstens n bikonnexen Mengen dargestellt werden (Theorem 5). — Beginnend mit diesem Satz, wendet der Verf. sein Augenmerk auf die Zusammenhänge, die zwischen dem Dimensionsbegriff und der Zerlegbarkeit von Mengen in bikonnexe Teilmengen existieren. Als Hauptsatz in dieser Richtung wird bewiesen, daß der R^n , $n \geq 2$ als Summe einer beliebigen Anzahl $m > n$ bikonnexen disjunkten Mengen dargestellt werden kann, was unter Benutzung von Theor. 6 ergibt, daß die Dimensionszahl der Koordinatenräume um 1 größer ist als die kleinste Anzahl der bikonnexen Summanden, in die der Raum zerlegt werden kann (die Dimensionszahl 1 bildet eine Ausnahme). — Der R^n , $n \geq 2$ kann in abzählbar-viele disjunkte bikonnexe Mengen zerlegt werden; für $n \geq 3$ gibt es sodann in selbstverständlicher Weise auch Zerlegungen in c bikonnexe Mengen; dagegen bleibt unentschieden, ob man die Ebene in c bikonnexe Mengen zerlegen kann. *P. Alexandroff.*

Volibner, W.: Sur les points accessibles dans les ensembles fermés. *Mathematica* 6, 124—131 (1932).

Eine Punktmenge A heißt in ihrem Punkte a von einer Menge B aus erreichbar, falls es ein mehrgpunktiges Kontinuum C gibt, derart, daß $C \cdot A = (a)$ und $C - A \subset B$ ist. Ist $B = E_n$ (euklidischer n -dimensionaler Raum) und $A = \bar{A} \subset B$, so kann bekanntlich C stets als einfacher Bogen gewählt werden. Eine in ihren sämtlichen Punkten erreichbare bzw. unerreichbare Menge heißt schlechthin erreichbar bzw. unerreichbar. Es werden einige einfache Sätze hergeleitet und als Hauptresultat eine kompakte Menge $A \subset E_2$ konstruiert, die aus \aleph_0 mehrgpunktigen, von $E_2 - A$ lauter unerreichbaren, und 2^{\aleph_0} übrigen einpunktigen, von $E_2 - A$ lauter erreichbaren Komponenten besteht. Dabei bilden die ersteren eine Folge einfacher Bögen $\{I_i\}$ und $A = \sum_i I_i$. Es

ergibt sich aus dieser Konstruktion eine allgemeine Methode, jede kompakte Menge $M \subset E_n$ ($n > 1$) mit einer (sich punkthaft abschließenden) Folge F von $(n-1)$ -dimensionalen, zueinander und zu M punktfremden Polyedern derart zu umspinnen, daß M von $E_n - F$ unerreichbar wird.

B. Knaster (Warschau).

Sierpiński, W.: Sur deux propriétés des ensembles mesurables B. *Mathematica* 6, 114—119 (1932).

Es sei K eine Menge von irgendwelchen Elementen, Φ_1 ein System von Teilmengen der Menge K , Ψ_1 das System ihrer Komplementärmengen, Φ_α das System aller abzählbaren Summen der Mengen, welche zu den Systemen Ψ_β , $\beta < \alpha$, gehören, und Ψ_α das System aller Komplementärmengen zu den Mengen aus Φ_α . Man erhält also mit Hilfe der transfiniten Induktion eine transfinite Folge von Mengenklassen Φ_α und Ψ_α . Satz I: Wenn die Mengen E und H aus Ψ_α , $\alpha > 1$, disjunkt sind, so gibt es zwei disjunkte Mengen $M \supset E$ und $N \supset H$, welche gleichzeitig zu Φ_α und Ψ_α gehören. Das Interesse dieses Satzes liegt in erster Linie darin, daß durch ihn im Rahmen der abstrakten Mengenlehre ein Analogon der Lusinschen Trennungssätze für B - und A -Mengen erbracht wird. Der Satz II bildet eine Verallgemeinerung des Satzes I. Nach dem Satze III könnte man im I. nicht Ψ_α durch Φ_α ersetzen.

A. Kolmogoroff.

Neumann, J. v.: Einige Sätze über meßbare Abbildungen. *Ann. of Math.*, II. s. 33, 574—586 (1932).

Ein Raum heißt m -Raum, wenn er metrisch, separabel und vollständig ist. Eine für alle Teilmengen N eines m -Raumes Ω definierte reelle Funktion $\mu^*(N)$ heißt l -Maß, wenn gilt: 1. $0 \leq \mu^*(N) \leq \infty$; für jede Kugel $C \subset \Omega$ ist μ^* endlich; 2. aus $M \subset N$ folgt $\mu^*(M) \leq \mu^*(N)$; 3. $\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} N_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(N_k)$; 4. haben M und N positiven Abstand,

so ist $\mu^*(M+N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$; 5. $\mu^*(M) = \inf \mu^*(O)$, wo O alle offenen Mengen $\supset M$ durchläuft. (1. und 5. gehen über die bekannten Caratheodoryschen Forderungen hinaus.) M heißt meßbar, wenn für jedes $N \subset \Omega$ gilt $\mu^*(N) = \mu^*(M \cdot N) + \mu^*(N - M \cdot N)$. — Sind Ω und $\bar{\Omega}$ zwei m -Räume mit den l -Maßen μ^* und $\bar{\mu}^*$, so heißt eine eindeutige Punktabbildung $x \rightarrow \bar{x}$ von Ω auf $\bar{\Omega}$ maßtreu, wenn sie jede meßbare Menge aus Ω auf eine meßbare Menge $\subset \bar{\Omega}$ von gleichem Maß abbildet und umgekehrt. Nennt man zwei Mengen M, N eines m -Raumes äquivalent, wenn sie sich nur durch eine Menge vom Maße 0 unterscheiden [d. h. $\mu^*((M+N) - M \cdot N) = 0$ ist], so heißt eine Mengenabbildung von Ω auf $\bar{\Omega}$ maßtreu, wenn sie jede meßbare Menge $\subset \Omega$ auf eine meßbare Menge $\subset \bar{\Omega}$ von gleichem Maß abbildet, und zwar derart, daß 1. zu jedem meßbaren $\bar{M} \subset \bar{\Omega}$ ein meßbares $M \subset \Omega$ existiert, dessen Bild in $\bar{\Omega}$ zu \bar{M} äquivalent ist, und 2. aus $M_k \rightarrow \bar{M}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) folgt $\Sigma M_k \rightarrow \Sigma \bar{M}_k$ und $\Pi M_k \rightarrow \Pi \bar{M}_k$. Zwei maßtreue Mengenabbildungen heißen äquivalent, wenn für jede meßbare Menge $\subset \Omega$ die beiden Bildmengen $\subset \bar{\Omega}$ äquivalent sind. — Verf. beweist nun vor allem den Satz: Die durch eine maßtreue Punktabbildung von Ω auf $\bar{\Omega}$ erzeugte Mengenabbildung ist maßtreu. Umgekehrt ist jede maßtreue Mengenabbildung von Ω auf $\bar{\Omega}$ einer solchen äquivalent, die erzeugt wird durch eine maßtreue Punktabbildung von Ω_1 auf $\bar{\Omega}_1$, wo $\Omega_1 \subset \Omega$, $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}$ und $\mu^*(\Omega - \Omega_1) = \bar{\mu}^*(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_1) = 0$ ist; falls Ω und $\bar{\Omega}$ un abzählbar sind, kann man $\Omega_1 = \Omega$ und $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}$ wählen. — Eine eindeutige Punktabbildung $x \rightarrow \bar{x}$ ist schon dann maßtreu, wenn sie jedes meßbare $M \subset \Omega$ in ein meßbares $\bar{M} \subset \bar{\Omega}$ von gleichem Maß überführt. *Nöbeling* (Wien).

Kuratowski, Casimir: Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers. *Mathematica* 6, 120–123 (1932).

La fonction $f(x)$, définie pour les points de l'ensemble parfait non-dense de Cantor: $f(0) = 0$; pour

$$x = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_2}} + \dots + \frac{2}{3^{n_k}} + \dots, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

$$f(x) = \frac{(-1)^{n_1}}{2} + \frac{(-1)^{n_2}}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{n_k}}{2^k} + \dots,$$

a un image (\equiv ensemble des points du plan à abscisse x et à ordonnée $f(x)$) de dimension 1 aux extrémités droites des intervalles „contigus“ (les points de discontinuité de $f(x)$) et de dimension 0 en chaque autre point. C'est une conséquence du théorème général: „La fonction bornée $f(x)$, définie sur un ensemble fermé X , est telle que: 1° l'ensemble D des points de discontinuité de $f(x)$ est dénombrable, 2° pour chaque x de D il existe deux suites x'_m et x''_m avec

$$\begin{aligned} \lim_{m=\infty} x'_m &= x, & \lim_{m=\infty} \overline{f(x'_m)} &= \overline{f(x)}, & \lim_{m=\infty} \underline{f(x'_m)} &= f(x), \\ \lim_{m=\infty} x''_m &= x, & \lim_{m=\infty} \overline{f(x''_m)} &= \overline{f(x)}, & \lim_{m=\infty} \underline{f(x''_m)} &= f(x). \end{aligned}$$

($\overline{f(x)}$ et $\underline{f(x)}$ sont resp. plus grande et plus petite limite au point x .) Alors l'image I de $f(x)$ n'est de dimension 0 en aucun point d'abscisse appartenant à D . Si, en outre, X est non dense, I est de dimension 0 en chaque autre point.“ *Ridder* (Groningen).

Malchair, Henri: Un théorème sur les suites transfinies de fonctions. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 1, 137–139 (1932).

L'auteur démontre: Si la suite transfinie (du type Ω) de fonctions discontinues dans un intervalle (a, b) :

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots \quad (\xi < \Omega)$$

est convergente dans cet intervalle et si l'ensemble E des points de discontinuité des fonctions est dénombrable, alors tous les termes de la suite sont égaux à partir d'un

certain indice. C'est une généralisation d'un théorème de Sierpiński, *Fundam. Math.* 1, 133 (1920). J. Ridder (Groningen).

Gilman, R. E.: A class of functions continuous but not absolutely continuous. *Ann. of Math.*, II. s. 33, 433—442 (1932).

The author extends several properties of the classical Cantor-Lebesgue function to analogous functions associated with more general perfect sets. A complete classification of various cases which can occur concerning the values of the derived numbers of the function at a given point is given on the basis of the arithmetic nature of the representation of this point. J. D. Tamarkin (Providence).

Kaczmarz, S.: The divergence of certain integrals. *J. London Math. Soc.* 7, 218 bis 222 (1932).

The author shows: If $\varphi(t)$ is a positive, continuous and increasing function of t and $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, then there exists a continuous function $f(x)$ such that the improper

integral $\int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\varphi(t)} dt$ is divergent for all values of x ; the set of such func-

tions is of the second category in the space of continuous functions. (Cf. Kaczmarz, this *Zbl.* 3, 297.) J. Ridder (Groningen).

Kempisty, Stefan: Sur les dérivées des fonctions des systèmes simples d'intervalles. *Bull. Soc. Math. France* 60, 106—126 (1932).

Définitions. 1. Un système simple d'intervalles se compose d'un nombre fini d'intervalles non empiétants: $A = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$. 2. En partant d'une fonction d'intervalle $F(I)$, une fonction de système simple s'obtient en posant:

$$F(A) = F(I_1) + F(I_2) + \dots + F(I_n).$$

3. Un système simple A est régulier suivant le paramètre α par rapport à un point x quand le plus petit voisinage V_x contenant A satisfait à la condition: $|A| > \alpha |V_x|$.

4. La dérivée inférieure de paramètre α de $F(A)$, $\underline{D}_x^\alpha F(A)$, est égale à $\liminf_{A \rightarrow x} \frac{F(A)}{|A|}$,

où les A sont des systèmes simples réguliers suivant le paramètre α et dont les mesures tendent vers zéro. 5. Si l'on a: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \underline{D}_x^\alpha F(A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \overline{D}_x^\alpha F(A)$, la valeur commune définit

la dérivée $D_x F(A)$. 6. Pour $0 < \lambda < 1$ la borne supérieure [inférieure] à densité λ près de $f(x)$ dans I , $M(f, I, \lambda)$ [$m(f, I, \lambda)$], sera le plus petit [plus grand] des nombres a tels que l'ensemble $E_x(f(x) > a)$ [$E_x(f(x) < a)$] vérifie la condition $|E| \leq \lambda |I|$.

7. La fonction d'intervalle $G(f, I, \lambda)$ sera égale à $M(f, I, \lambda) |I|$, d'où l'on obtient la fonction de système simple $G(f, A, \lambda)$ suivant la définition 2. [D'une manière analogue on définit une fonction $g(f, A, \lambda)$]. 8. $f(x)$ est approximativement continue au sens strict quand $f(x) = D_x G(f, A, \lambda) = D_x g(f, A, \lambda)$ quel que soit λ . Théorèmes:

I. Toute fonction $f(x)$ approximativement continue et bornée dans un intervalle R est égale à la dérivée de son intégrale $\int_A f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \dots + \int_{I_n} f(x) dx$. — II. La

dérivée d'une fonction de système simple dans un intervalle est approximativement continue au sens strict. — III. Toute fonction sommable dans un intervalle est presque partout approximativement continue au sens strict. — IV. Une fonction de système simple dérivable est absolument continue et intégrable au sens de Burkill; sa dérivée est sommable et l'intégrale de cette dérivée est égale à l'intégrale (de Burkill) de la fonction primitive. J. Ridder (Groningen).

Analysis.

Schürmann, Peter: Über monotone Funktionen. Münster i. W.: Diss. 1932. 20 S. Bekannte Borelsche Wachstumssätze über reelle Funktionen und ihre besonders von griechischen Mathematikern herrührenden Verschärfungen werden einer kri-

tischen und abrundenden Behandlung unterzogen. Eine Reihe dieser Sätze wird erstlich aus der üblichen Gestalt durch mehrfaches Logarithmieren in eine Art von Differenzungleichungen umgeschrieben, wodurch sie übersichtlich vergleichbar werden. Es sei $M(x)$ eine reelle, im weiteren Sinne monoton gegen ∞ wachsende Funktion für $a \leq x < \infty$. Die Wachstumssätze von Borel und seinen Nachfolgern sagen aus, daß für gewisse positive, stetige und monotone Funktionen $\mu(y)$ die Ungleichungen

$$M[x + 1/\mu\{M(x)\}] - M(x) < \beta \quad (\beta > 0) \quad (1)$$

und für die Ableitung

$$M'(x) < \beta \mu\{M(x)\} \quad (2)$$

für alle x bis auf eine i. A. unendliche Menge von Ausnahmeintervallen von endlicher Gesamtlänge bestehen. Hierbei war verschiedenes unbewiesen geblieben, oder hat sich als irrig erwiesen. Verf. kann nun in seiner, von Nider angeregten Doktorarbeit die

Konvergenz des Integrals $\int_{\mu(y)}^{\infty} \frac{1}{\mu(y)} dy$ als eine hinreichende und in gewissem Sinne auch notwendige Bedingung für das Bestehen dieser Ungleichungen nachweisen. Im Divergenzfalle würde nämlich die Menge der Ausnahmeintervalle keine endliche Gesamtlänge mehr haben.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Calugareano, Georges: Sur un complément au théorème de M. Borel. *Mathematica* **6**, 25—30 (1932).

Verf. gibt ebenfalls den ersten Teil (hinreichende Bedingg.) des Satzes (1) aus der vorstehend besprochenen Arbeit. Er wendet dies an auf die Frage der Konvergenz der von ihm eingeführten Verallgemeinerungen der Borelschen Reihen der z -Stellen (dies. Zbl. **1**, 214), indem er zeigt, daß gewisse Divergenzerscheinungen dort beseitigt werden können, wenn man die Charakteristik $T(r)$ in gewissen Intervallen geeignet abändert.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Szmuszkowiczówna, Hanna: Sur un lemme de M. Pólya. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **24**, 211—214 (1932).

Ein vereinfachter Beweis eines Hilfssatzes von Pólya über den transfiniten Durchmesser.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Aitken, A. C.: Note on polynomial interpolation. *Math. Notes* Nr **27**, XIII—XV (1932).

Gončarov, V.: Sur un procédé d'itération. *Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine*, IV. s. **5**, 67—85 (1932).

Let $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ represent a periodic set of real points, the "order" of the period being p , i. e. $x_{n+p} = x_n$ ($n = 0, 1, \dots$). The author investigates the asymptotic behaviour, for $n \rightarrow \infty$, of the sequence $\{\varphi_n(x)\}$ defined by

$$\varphi_0(x) = \varphi(x), \quad \varphi_n(x) = \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} \varphi(x^{(n)}) dx^{(n)}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

which leads to the "iterative" relation:

$$\varphi_{(n+1)p+m}(x) = \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{p-1}}^{x^{(p-1)}} \varphi_{np+m}(x^{(p)}) dx^{(p)}.$$

For this purpose he introduces the generating function (1) $F(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x)$

(λ — complex parameter) satisfying a linear differential equation of the form: $y^{(p)} - \lambda^p y = f(\lambda, x)$. Making use of the latter, the author obtains the fundamental result: (2) $F(\lambda, x) = \Delta(\lambda, x)/\Delta(\lambda)$, where $\Delta(\lambda, x)$, $\Delta(\lambda)$ are integral transcendental functions of λ , and $\Delta(\omega\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$ ($\omega = e^{2\pi i/p}$); in other words, $F(\lambda, x)$ is a meromorphic function of λ , and $\Delta(\lambda)$ is an integral transcendental function of λ^p . Comparing (1) and (2), we obtain the desired asymptotic expression ($n \rightarrow \infty$) in the form:

$$\varphi_{np+m}(x) \sim \frac{T_m(x)}{\lambda_0^{np+1}} \quad (m = 0, 1, \dots, p-1),$$

assuming that among the zeros of $\Delta(\lambda^{1/p})$

there exists only one simple zero λ_0 of the smallest modulus. The author further shows that if $\{\varphi_n(x)\}$ be properly normalized, for ex., $\varphi_n(x^*) = 1$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = T(x)$ exists (restricting properly the choice of x^*), which is independent of m . Finally, the author raises the question as to the general existence of zeros of $\Delta(\lambda)$. While a definite answer is lacking, the probable answer is: $\Delta(\lambda)$ has zeros for $p > 1$, and this is shown to hold true for $p = 2, 3, 4, 5$. Application is made to expansions of the form: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_n) P_n(x)$. J. Shohat (Philadelphia).

Tchakaloff, L.: Sur une propriété des polynômes trigonométriques. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 411—413 (1932).

E_m sei die Gesamtheit der reellen trigonometrischen Polynome der Form $\sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ mit $n \leq m$. Es wird bewiesen: Ein Polynom aus E_m verschwindet mindestens einmal in jedem Intervall der Länge $\frac{m}{m+1} \cdot 2\pi$; zu jedem kleineren Intervall gibt es ein Polynom aus E_m , das dort nicht verschwindet.

Rellich (Göttingen).

Goldstein, S.: Operational representations of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function. Proc. London Math. Soc., II. s. **34**, 103—125 (1932).

The author uses the methods of the operational calculus, which was originally devised by Heaviside for the solution of electrical problems and was afterwards developed by Bromwich and others, and was shown to be connected with the theory of generalised differentiation and integration, and with Volterra's theory of functions of composition. In this paper the methods are applied to study the confluent hypergeometric function $W_{k,m}(x)$ and the parabolic cylinder function $D_n(x)$. A great number of formulae is obtained, many of which are of interest in physical investigations, especially in wave-mechanics.

Whittaker (Edinburgh).

Manià, B.: Sopra un teorema di esistenza nel calcolo delle variazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 809—813 (1932).

Beweis einiger geometrischer Hilfssätze, die nötig sind, um aus dem Hahnschen Existenzsatz (S.-B. Akad. Wiss. Wien **1925**) ein Theorem von Tonelli herzuleiten, das in den Fondamenti di calcolo delle variazioni vol. II p. 33 mit „V. teorema d'esistenza“ bezeichnet ist.

Rellich (Göttingen).

De Agostino, Ernesto: Particolare problema di calcolo delle variazioni per punti terminali mobili. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 405—423 (1932).

Frage nach dem absoluten Minimum des Integrals

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (a y'^2 + 2p y y' + \beta y^2 + 2q y' + 2\gamma y + r) dx,$$

wobei $y(x)$ an einem oder an beiden Enden des Intervalls $x_1 \leq x \leq x_2$ frei ist. Das Kriterium für die Existenz eines Minimums besteht in einer Ungleichung, der der kleinste Eigenwert des mit der Aufgabe verknüpften Eigenwertproblems genügen muß.

Rellich (Göttingen).

Douglas, Jesse: Corrections to the paper „The problem of plateau for two contours“. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **11**, 212 (1932).

Reihen, Fourierreihen, Fastperiodische Funktionen:

Mambriani, A.: Sulle espressioni della forma $\sum_{r=0}^n k_{n,r} a_{n-r} b_r$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ist. Lombardo, Rend., II. s. **65**, 461—471 (1932).

Zu je zwei Folgen a_n, b_n wird eine dritte Folge vermöge

$$|c_n = \sum_{r=0}^n k_{n,r} a_{n-r} b_r \quad (1)$$

definiert. Die Bedingung für die Assoziativität dieser Operation wird aufgestellt. Aus ihr folgt die Kommutativität. Die Bedingungen für Auflösbarkeit der Formel (1) nach a_n oder b_n durch lineare Funktionen der c_n von derselben Gestalt (1) werden diskutiert.
van der Waerden (Leipzig).

Broggi, U.: Una generalizzazione degli sviluppi in serie delle funzioni determinanti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 615—619 (1932).

Let (1) $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \Phi(t) dt$, $f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \varphi(t) dt$ [$R(x) > \lambda$, $R(x) > \mu$ resp., $\Phi < \varphi$ properly restricted]. Assume $\Phi(t)$ to be the product of $\varphi(t)$ by an integral function $\sum_{i=0}^\infty \alpha_i t^i$ and that $S(x) \equiv \sum_{i=0}^\infty \alpha_i \int_0^\infty e^{-tx} t^i \varphi(t) dt$ converges [x lying inside the region of convergence of (1)]. The author proves (introducing $f(x, u) = \int_0^u e^{-tx} \varphi(t) dt$, $F(x, u) = \int_0^u e^{-tx} \Phi(t) dt$ and letting $u \rightarrow \infty$) that $F(x) = \alpha_0 f(x) - \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f''(x) \mp \dots$ [$R(x)$ sufficiently large]. Similar considerations, applied to $F(x) = \int_0^1 t^{x-1} \Psi(t) dt$, $f(x) = \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) dt$, where (2) $\Psi(t) = \psi(t) \sum_{i=0}^\infty \beta_i t^i \equiv \psi(t) h(t)$, and $\sum_{i=0}^\infty \beta_i = h(1)$ converges, lead to $F(x) = \sum_{i=0}^\infty \beta_i f(x+i)$. Finally, we subject $h(t)$ in (2) to certain conditions of analyticity in the circle $|t-1|=1$, and we get

$$F(x) = h(1)f(x) + \frac{h'(1)}{1!} \Delta f(x) + \frac{h''(1)}{2!} \Delta^2 f(x) + \dots \quad [R(x) > \text{certain } \sigma > 0].$$

Taking above $\varphi(t) \equiv \psi(t) \equiv 1$, we obtain, as particular cases, the expansions:

$$F(x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{\alpha_i (i!)}{x^{i+1}}, \quad \sum_{i=0}^\infty \frac{\beta_i}{x+i}, \quad \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i h^{(i)}(1)}{x(x+1) \dots (x+i)}.$$

J. Shohat (Philadelphia).

Mulholland, H. P.: On the generalization of Hardy's inequality. J. London Math. Soc. 7, 208—214 (1932).

Die Hardysche Ungleichung $\sum_1^\infty \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^k \leq K \sum_1^\infty a_n^k$ ($a_n \geq 0$, $k > 1$, K unabhängig von a_n) wurde insbesondere von Knopp [Math. Z. 30, 387—403 (1929)] durch Betrachtung von Ungleichungen der Form

$$\sum \Phi \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) \leq K \sum \Phi(a_n) \quad (*)$$

und

$$\sum \lambda_n \Phi \left(\frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \right) \leq K \sum \lambda_n \Phi(a_n) \quad (**)$$

erheblich verallgemeinert. Diese Untersuchungen führt Verf. zu einem gewissen Abschluß, indem er notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (*) und (**) angibt: 1. Dafür, daß für eine wachsende Funktion $\Phi(x)$ ($\Phi(0) = 0$) die Ungleichung (*) stets erfüllt ist, ist es notwendig und hinreichend, daß mit einem passenden $k > 1$ die Funktion $\sqrt[k]{\Phi(x)}$ quasikonvex ausfällt. Dabei ist unter einer quasikonvexen Funktion $\Psi(x)$ eine solche zu verstehen, die eine konvexe Funktion $\psi(x)$ und eine Konstante $A > 1$ so zu wählen gestattet, daß $\psi(x) \leq \Psi(x) \leq A\psi(x)$ erfüllt ist. 2. Wenn $\sum \lambda_n$ divergiert, so gilt das gleiche auch in bezug auf die Ungleichung (**).
R. Schmidt (Kiel).

Woronoï, G. F.: Extension of the notion of the limit of the sum of terms of an infinite series. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 422—428 (1932).

Übersetzung einer Note von Woronoï, die bereits in den Berichten des 11. Kongresses (1901) der Russischen Naturforscher und Ärzte, St. Petersburg 1902, S. 60 bis 61, in russischer Sprache erschienen ist (Übersetzer: J. Tamarkin). Es ist zu konstatieren, daß W. bereits damals eine Klasse von Limitierungsverfahren angegeben hat, die mit der 17 Jahre später von Nörlund betrachteten identisch ist und als solche die Cesàroschen C_α - und die Rieszschen $R(n, \alpha)$ -Verfahren als Spezialfälle umfaßt. Ferner hat W. die Verträglichkeit (consistency) der Verfahren seiner Klasse erkannt und einen Beweis hierfür skizziert, dessen Grundgedanke (Anwendung des Abelschen Stetigkeitssatzes) übereinstimmt mit dem, der später von Zygmund [*Mathesis Polska* **1**, 75—85, 119—129 (1926); **5**, 46 (1930)] und Silverman-Tamarkin [*Math. Z.* **29**, 161—170 (1928)] ausgewertet wurde. — In seinen Bemerkungen zu der Note von W. führt der Übersetzer eine Untersuchung über die Bedingungen durch, die den Verträglichkeitsbeweis mit Hilfe des Abelschen Satzes gestatten, und stellt schließlich fest, daß in einer Note von Kogbetliantz [*Mém. Sci. math.* **51**, 52 (1931) dies. Zbl. **3**, 7] weder die Voraussetzungen noch die Resultate von W. korrekt wiedergegeben werden.

R. Schmidt (Kiel).

Gilman, R. E.: A remark on Nörlund's method of summation. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 429—432 (1932).

Es wird gezeigt, daß ein Ergebnis von J. Tamarkin in seinen Bemerkungen zu der vorstehend referierten Note von Woronoï ein bestmögliches ist. R. Schmidt (Kiel).

Agnew, Ralph Palmer: On deferred Cesàro means. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 413 bis 421 (1932).

Verf. hebt einige unerwünschte Eigenschaften der meisten, insbesondere der Cesàroschen Mittelbildungen in ihrer Anwendung auf Funktionenfolgen hervor (z. B. Vergrößerung der Oszillationen, Nichterhaltung der gleichmäßigen Konvergenz und der Konvergenz im Mittel) und findet den Hauptgrund für solche Erscheinungen darin, daß die Mittelbildungen nicht „spaltenfinit“ sind, d. h. daß die Bedingung, jede Spalte der Matrix der Mittelbildung enthalte nur endlich viele von Null verschiedene Elemente, nicht erfüllt ist. Diese Bemerkung führt den Verf. dazu, neben den arithmetischen Mitteln $M_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}$ die Transformationen

$$D_n(\{p_n\}, \{q_n\}) = \frac{s_{p_n+1} + s_{p_n+2} + \dots + s_{q_n}}{q_n - p_n} \quad (q_n > p_n, q_n \rightarrow \infty)$$

zu betrachten. Für Spaltenfinitheit ist dann $p_n \rightarrow \infty$ notwendig und hinreichend. — Für diese verschobenen arithmetischen Mittel werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß sie stärker oder schwächer als die gewöhnlichen arithmetischen Mittel oder mit diesen äquivalent sind. Ebenso werden die gegenseitige Permanenz und ähnliche Fragen behandelt.

R. Schmidt (Kiel).

Raff, Hermann: Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen. *Math. Z.* **36**, 1—34 (1932).

Etant donnée une suite $\{s_n\}$ bornée et divergente et une matrice infinie (a_{nv}) , où n et $v = 0, 1, \dots$, formons la suite $\{t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v\}$ et supposons que la matrice (a_{nv}) soit régulière, c'est-à-dire qu'elle remplisse les trois conditions suivantes: 1° $a_{nv} \rightarrow 0$ pour tout v fixe et $n \rightarrow \infty$, 2° le nombre $N = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|$, dite la norme de la matrice, est fini, 3° $\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow \infty$. — L'auteur examine vers quelles limites peut tendre la suite $\{t_n\}$, supposée convergente, si la matrice régulière (a_{nv}) varie de sorte que sa norme prend des valeurs déterminées et si les points d'accumulation de la suite $\{s_n\}$ sont données. Il démontre d'abord la proposition remarquable que voici:

Si la suite $\{s_n\}$ n'a que deux points d'accumulation a et b on peut trouver, à tout point t de l'ellipse $\frac{|t-a|+|t-b|}{|a-b|} \leq K$ (K quelconque ≥ 1) et à tout $N_0 \geq K$, une matrice régulière dont la norme $N = N_0$ et pour laquelle $t_n \rightarrow t$. Au contraire, si $N \leq K$ la suite $\{t_n\}$ ne peut tendre vers aucun point situé à l'extérieur de cette ellipse. — La suite du travail est consacrée à l'extension de cette proposition aux différents cas où la suite $\{s_n\}$ a plus de deux points d'accumulation.

F. Leja (Warszawa).

Lense, Josef: Über lineare Transformationen von Zahlenfolgen. *Math. Z.* **36**, 39—103 (1932).

Supposons que les nombres $a_{\mu\nu}$, $\nu \leq \mu = 1, 2, \dots$, remplissent les conditions A, B, C et D que voici: A. $a_{np} \rightarrow 0$ pour tout p fixe et $n \rightarrow \infty$, B. $\sum_{p=1}^n |a_{np}| < K$, où K est un nombre fixe, C. $\sum_{p=1}^n a_{np} \rightarrow 1$ pour $n \rightarrow \infty$, D. $a_{n,n-p} \rightarrow 0$, pour tout p fixe et $n \rightarrow \infty$, et posons $u_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$, $v_n = a_{n1}x_1y_n + a_{n2}x_2y_{n-1} + \dots + a_{nn}x_ny_1$, où $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites convergentes quelconques. L'auteur démontre les trois propositions connues suivantes [v. O. Toeplitz, *Prace mat. fiz.* **22**, 113—119 (1911) et I. Schur, *J. reine angew. Math.* **151**, 79—111 (1921)]: I. Les conditions A et B sont nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $u_n \rightarrow 0$, quel que soit $x_n \rightarrow 0$. — II. Les conditions A, B et C sont nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $\lim u_n = \lim x_n$, quel que soit $\{x_n\}$. — III. Les conditions A, B, C et D sont nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $\lim v_n = \lim x_n \cdot \lim y_n$, quels que soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$.

F. Leja (Warszawa).

Mambriani, A.: Sulla sommabilità delle serie doppie di Fourier, di funzioni discontinue. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **15**, 715—720 (1932).

Tonelli [Serie Trig., Bologna 1928, 487] has proved that the Fejér polynomial $\sigma_{\mu,\nu}(x, y)$ associated with the double Fourier series of a function $f(x, y)$ converges to the arithmetic mean of the four limits $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$, under suitable restrictions upon $f(x, y)$. If instead of these limits we introduce the limits f_1, f_2, f_3, f_4 reached by $f(x, y)$ when $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ remaining in one of the quadrants made by any two lines (not necessarily parallel to the coordinate axes) intersecting orthogonally at (x_0, y_0) , the author shows that the condition $f_1 + f_3 = f_2 + f_4$ is necessary and sufficient in order that $\sigma_{\mu,\nu}(x_0, y_0) \rightarrow \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$. The author corrects a statement of C. N. Moore [Math. Ann. **74**, 562 (1913)] concerning this problem.

J. D. Tamarkin (Providence).

Zygmund, Antoni: On lacunary trigonometric series. *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 435—446 (1932).

L'auteur démontre plusieurs théorèmes concernant les séries

$$\sum (a_k \cos n_k \theta + b_k \sin n_k \theta) \quad (n_{k+1}/n_k > q > 1). \quad (1)$$

Signalons les théorèmes suivants: Si les sommes partielles de (1) sont uniformément bornées sur un ensemble E , de mesure positive, la série (2) $\sum (a_k^2 + b_k^2)$ converge. Il suffit, même, que les sommes de Toeplitz soient uniformément bornées dans E pour que (2) converge. Si (1) est la série de Fourier de $F(\theta)$, approximativement dérivable sur E (de mesure positive) $\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\theta+h) - F(\theta)}{h} \text{ existe lorsque } h \rightarrow \pm 0, \text{ tout en restant sur un ensemble } H \text{ admettant } 0 \text{ comme point de densité} \right)$, la série $\sum (a_k^2 + b_k^2) n^2$ converge. Si (1) tend vers 0 sur E , cette série est identiquement nulle.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Bohr, Harald: Über fastperiodische ebene Bewegungen. *Comment. math. helv.* **4**, 51—64 (1932).

Soit $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ une fonction p. p. de la variable réelle t ($-\infty < t < +\infty$), E l'ensemble des points du plan complexe: $z = f(t)$, E^* l'ensemble fermé déduit de E

et $C(E^*)$ l'ensemble complémentaire de E^* . — Désignons par a l'affixe d'un point de $C(E^*)$, on a, en passant en coordonnées polaires:

$$f(t) - a = f_a(t) e^{i\varphi_a(t)}.$$

H. Bohr se propose d'étudier les deux fonctions $f_a(t)$ et $\varphi_a(t)$. A leur sujet il démontre les deux théorèmes suivants: 1° on a

$$\varphi_a(t) = c_a \cdot t + \psi_a(t)$$

où c_a est une constante et $\psi_a(t)$ une fonction presque-périodique. 2° La constante séculaire c_a appartient au module M_f des exposants de f ; les modules des fonctions $f_a(t)$ et $\psi_a(t)$ sont contenus dans M_f . J. Favard (Grenoble).

Differential- und Differenzgleichungen:

Thum, P. B.: Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen. J. reine angew. Math. 168, 65—90 (1932).

Verf. behandelt neben ähnlich lautenden elliptischen das folgende parabolische Problem:

$$g(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - l(x) u(x, t), \quad (*)$$

$$(k(x) > 0, g(x) > 0, l(x) \geq 0),$$

$$\left[a_1 u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[b_1 u(x, t) + b \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=1} = 0. \quad \left(\begin{matrix} a_1 a \geq 0 \\ b_1 b \geq 0 \end{matrix} \right) \quad (**)$$

An Stelle der üblichen Randbedingung für $t = 0$ wird gefordert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 [u(x, t) - f(x)]^2 dx = 0, \quad (***)$$

wo f eine gegebene, im Lebesgueschen Sinn quadratisch integrierbare Funktion ist. Verf. macht zur Lösung den Ansatz:

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} q e^{-e^t t} d q \int_0^1 G(x, \xi, q^2) f(\xi) d \xi. \quad (****)$$

Hierbei ist $G(x, \xi, q^2)$ die Greensche Funktion derjenigen eindimensionalen Randwertaufgabe, die man aus (*) und (**) durch den Ansatz $u = e^{-e^t t} V(x)$ für die Funktion $V(x)$ erhält, und C_k ($k = 1, 2, \dots$) sind geeignete Integrationswege in der komplexen q -Ebene, die für $k \rightarrow \infty$ alle Pole von $G(x, \xi, q^2)$ umschließen. Zunächst wird die Eindeutigkeit der Aufgabe bewiesen. Sodann werden asymptotische Eigenschaften der Greenschen Funktion G hergeleitet, die zum Nachweis, daß (****) die Gl. (*) und die Randbedingung (**) befriedigt, benutzt werden. Schließlich wird unter Benutzung von Hilfsmitteln aus der Theorie der reellen Funktionen das Verhalten von $u(x, t)$ für $t \rightarrow 0$ untersucht und das Erfülltsein von (***) bewiesen. Zum Schluß zeigt Verf. noch, wie sich die angewandten Methoden auf den Fall ausdehnen lassen, in welchem an Stelle des Intervalls $0 \leq x \leq 1$ das Intervall $0 \leq x < \infty$ tritt. In diesem Falle wird das Verhalten von $u(x, t)$ für $t \rightarrow 0$ noch dazu benutzt, eine Integraldarstellung für eine im Lebesgueschen Sinne in $(0, \infty)$ absolut integrierbare Funktion $f(x)$ herzuleiten.

E. Rothe (Breslau).

Brelot, Marcel: Sur l'allure à la frontière des intégrales bornées de (1) $\Delta u = c(M) u$; ($c \geq 0$). Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 433—448 (1932).

Suite de plusieurs travaux (Zbl. 2, 259, 392; 4, 256). L'équation (1) est considérée dans l'espace à $n \geq 2$ dimensions. Complétant d'abord l'étude des points et suites réguliers, l'aut. établit deux résultats importants: 1° Q étant un point-frontière d'un ensemble ouvert δ , on peut former une fonction f de la distance $Q M$ telle que, si $c \geq f$, le point Q n'est certainement pas régulier pour le problème de Dirichlet correspondant; 2° si la fonction c_1 est telle que Q soit régulier, ce point est encore régulier pour le problème relatif à la fonction c si $c - c_1$ est borné, et même, dans les cas $n = 2$ ou 3, si $(c - c_1)^2$ est sommable. L'aut. étudie ensuite les points et les suites semi-régul-

liers, c.-à-d. tels que, si la distribution s'annule au point Q considéré, la solution du problème de Dirichlet tend vers zéro quand M tend vers Q (en appartenant à la suite, s'il y a lieu); il prouve notamment que ces notions se confondent avec celles de points et de suites harmoniquement réguliers. Enfin sous le nom de points-zéro sont étudiés les points Q tels que toute intégrale bornée sur δ au voisinage de Q s'annule en Q ; définition analogue pour les suites-zéro.

Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

Cioranescu, N.: Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en corrélation avec certaines propriétés des polynômes. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 409—411 (1932).

In einigen neueren Arbeiten (Mantel, Tchakaloff) wurde für gewisse Klassen von Funktionen, für die $\int_a^b f(x) dx = 0$ gilt, der „Kontraktionskoeffizient“ k bestimmt;

d. h. das Intervall $a' \leq x \leq b'$ mit $b' - a' = k(b - a)$, in dem alle Funktionen der Klasse mindestens eine Nullstelle besitzen. Hier wird diese Fragestellung auf polyharmonische Funktionen erweitert, wobei an Stelle des einfachen Integrals die üblichen Mittelbildungsintegrale treten.

Rellich (Göttingen).

Broggi, U.: Serie di fattoriali ed equazioni alle differenze. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 707—712 (1932).

The article deals with the solution of the difference equation

$$L[f(x)] \equiv \sum_{i=0}^p A_{p-i} f(x+i) = \varphi(x) \quad (A_0 = 1, A_p \neq 0) \quad (A)$$

obtained in the form $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi(x+i)$, where the α -s are the coefficients of the expansion

$$\frac{1}{P(t)} \equiv \frac{1}{\sum_{i=0}^p A_{p-i} t^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i,$$

and $\varphi(x)$ is subject to properly chosen conditions. Various results are obtained by specifying $\varphi(x)$: (1) $\varphi(x) = a^x \psi(x)$, (2) $\varphi(x) = \int_0^1 t^{x-1} \psi(t) dt$, etc. Thus, (1), where

$\psi(x)$ is a polynomial, leads to a polynomial solution of (A); (2) leads to $F(x) = \int_0^1 t^{x-1} \frac{\psi(t)}{P(t)} dt$ and to other representations of $F(x)$ — results closely related to those given in the preceding article by the same author (this Zbl. Math. **2**, 191). Applications are finally made to Euler polynomial $E_p^{(m)}$.

J. Shohat (Philadelphia).

Milne-Thomson, L. M.: On Boole's operational solution of linear finite difference equations with rational coefficients. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 311—318 (1932).

Es werden anknüpfend an den Booleschen Operatorkalkül zwei verallgemeinerte Operatoren definiert: $u(x)$ sei irgendeine Funktion von x , r eine feste Zahl, $\xi = x - r$. Der Operator ϱ ist definiert durch

$$\varrho^m u(x) = \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\Gamma(\xi - m + 1)} u(x - m).$$

(Bei Boole war $r = 0$ und m ganzzahlig.) Der Operator π ist definiert durch

$$\pi u(x) = (x - r) [u(x) - u(x - 1)] = \xi \cdot \underset{-1}{\Delta} u(x).$$

(Bei Boole war $r = 0$.) Es werden eine Reihe von Sätzen aufgestellt über Operatoren, die Polynome in π sind. Jede lineare Differenzengl., deren Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, läßt sich auf die Form bringen

$$[f_0(\pi) \varrho^k + f_1(\pi) \varrho^{k-1} + \dots + f_{k-1}(\pi) \varrho + f_k(\pi)] u = f(x),$$

wo die f_s , $s = 0, 1, 2, \dots, k$ Polynome bedeuten. Im Fall der homogenen Gleichung ergibt sich mit dem Ansatz

$$u = (\alpha_0 \varrho^m + \alpha_1 \varrho^{m-1} + \alpha_2 \varrho^{m-2} + \dots) 1$$

und Anwendung von $f(\pi)\varrho^m 1 = f(m)\varrho^m 1$ durch Nullsetzen der Koeffizienten aller Potenzen von ϱ eine Gleichung zur Bestimmung von m und Rekursionsformeln für die einzelnen Koeffizienten α_s . Die allgemeinste durch Fakultätenreihen lösbare lineare Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist auf die Form zu bringen:

$$\sum_{s=0}^p p_s(x) \Delta_{-1}^s u = 0,$$

wo die $p_s(x)$, $s = p, p-1, \dots, 2, 1, 0$ Polynome sind, deren Grad mit s abnimmt. Die von Nörlund angegebenen Sätze über die Lösungen dieser Gl. werden nach der Booleschen Methode abgeleitet und als Beispiel die Herstellung der Lösungen für die einfachste Gl. von dieser Form, mit $s = 2$, gezeigt. *S. Gradstein* (Darmstadt).

Funktionentheorie:

Biernacki, M.: Sur les zéros des fonctions holomorphes. *Mathematica* **6**, 31—35 (1932).

Ein bekannter Satz über die Lage der ursprungsnächsten Nullstelle der Funktion $f(z) = a_1 z + \dots$, die im Kreise $|z| < R$ beschränkt bleibt, $|f(z)| < M$, kann erweitert werden: Die Beschränktheit der Funktion selbst läßt sich durch Beschränktheit des quadratischen (oder eines allgemeineren) Mittelwertes ersetzen.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Paley, R. E. A. C., and A. Zygmund: A note on analytic functions in the unit circle. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **28**, 266—272 (1932).

Im Anschluß an Untersuchungen von Hardy und Littlewood [*Proc. London Math. Soc.* (2) **23**, 481—519 (1924); *J. reine angew. Math.* **167**, 405—423 (1932); *dies. Zbl.* **3**, 202] wird gezeigt: 1. Wenn $\chi(t)$ und $\psi(t)$ in $0 \leq t < \infty$ nichtnegativ, meßbar, in jedem endlichen Intervall beschränkt sind und $\frac{\chi(t)}{t} \rightarrow 0$, $\psi(t) \rightarrow 0$ mit $t \rightarrow \infty$ erfüllt ist, dann gibt es eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

derart, daß $\int_0^{2\pi} \chi(|u(r, \theta)|) d\theta = O(1)$, $\int_0^{2\pi} \psi(|v(r, \theta)|) d\theta \neq O(1)$ mit $r \rightarrow 1$. 2. Unter den gleichen Voraussetzungen über $\chi(t)$ gibt es eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$

derart, daß $\int_0^{2\pi} \chi(\lg |f(re^{i\theta})|) d\theta = O(1)$, während $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ für fast kein θ erfüllt ist.

3. Wenn $\omega(r)$ ($0 \leq r < \infty$) reell ist und $\omega(r) \rightarrow \infty$ mit $r \rightarrow \infty$, dann gibt es eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, die für fast alle θ keinen radialen Grenzwert besitzt, für die aber $\int_0^{2\pi} \lg |f(re^{i\theta})| d\theta = O(\omega(r))$ erfüllt ist. *R. Schmidt* (Kiel).

Calugareano, Georges: Sur le calcul de certaines intégrales définies. *Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest* **3**, 3—5 (1932).

Es wird eine Methode des Residuenkalküls veröffentlicht, welche in den klassischen Untersuchungen über den Gegenstand unbemerkt geblieben zu sein scheint:

Um Integrale der Form $\int_0^\infty f(z) dz$ zu ermitteln, wird der Residuensatz mit Vorteil auf die Hilfsfunktion $f(z) \log z$ anstatt des üblichen $f(z) z^\alpha$ angewandt.

Ullrich (Marburg, Lahn).

Takenaka, Satoru: A generalization of Ostrowski's theorem on „overconvergence“ of power series. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **8**, 224—227 (1932).

Übertragung auf eine vom Verf. schon früher (*dies. Zbl.* **4**, 262, 401) studierte Art von Polynomreihen mit endlichem Konvergenzkreis. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Shimizu, Tatsujiro: Miscellaneous remarks on power series. (*Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **14**, 112—124 (1932).

Eine Potenzreihe konvergiere im Einheitskreise und habe auf seinem Rande nur sog. algebraisch-logarithmische Singularitäten. Es sollen verschiedene Verfeinerungen

dieses Begriffs eingeführt und das zugehörige asymptotische Verhalten für Koeffizienten und Abschnitte der Potenzreihe angegeben werden. Ein zweiter Abschnitt der Note beschäftigt sich mit dem Hadamardschen Singularitätenmultiplikationssatz: Unter der Annahme, daß die beiden Urreihen $a(x) = \sum a_v x^v$ und $b(x) = \sum b_v x^v$ nur spezielle Singularitäten der eingeführten Klassen haben, werden Aussagen über die Art der Singularitäten der Hadamardschen Produktreihe $ab(x) = \sum a_v b_v x^v$ gemacht.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Valiron, G.: Sur quelques conséquences de théorèmes de M. Ahlfors. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1790—1792 (1932).

Verf. hält die Sätze von Landau und Schottky mit dem Ahlforsschen Drei- und Fünfscheibensatz (dies. Zbl. **3**, 407) zusammen und erzielt dadurch Ergebnisse folgender Art: Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$, so gibt es jeweils einen festen Radius R , der von a_0 und a_1 sowie von der Lage der drei bzw. fünf Kreisscheiben zueinander — nicht aber von $f(z)$ — abhängt, derart, daß für $|z| \leq R$ entweder $f(z)$ aufhört eindeutig analytisch zu sein, oder aber daß $f(z)$ wenigstens eine der Scheiben mit einem endlich vielblättrigen (Dreischeibensatz) oder einem schlichtblättrigen (Fünfscheibensatz) Flächenstück überdeckt. In der Note werden die Ergebnisse etwas anders ausgesprochen, indem eine der Scheiben als Umgebung von ∞ genommen wird, und regulär analytisch an Stelle von eindeutig analytisch tritt. Der Referent glaubt, daß die obigen symmetrischen Formulierungen den unsymmetrischen der Note vielleicht vorzuziehen wären. Ähnlich wird der Schottkysche Satz erweitert. Es lassen sich solche Aussagen insbesondere in der Umgebung von Juliapunkten machen.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Fujiwara, Matsusaburô: On the relation between $M(r)$ and the coefficients of a power series. Proc. Imp. Acad. Jap. **8**, 220—223 (1932).

Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ eine im Einheitskreis konvergente Potenzreihe. Verf. ergänzt Beuermanns Ergebnis über den Zusammenhang der Wachstumsordnungen von $\log M(r)$ und $\log |a_n|$ durch Angabe einer ähnlichen Beziehung zwischen den Wachstumstypen.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Paley, R. E. A. C.: A note on integral functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 262—265 (1932).

Es wird das Verhältnis zwischen $T(r, f) = m(r, f)$ und $\log M(r)$, also zwischen Charakteristik und Logarithmus des Maximalbetrags nach unten hin abgeschätzt. Während der Limes superior dieses Bruches für ganze Funktionen endlicher Ordnung eine positive untere Schranke hat, die von der Ordnung abhängt, können Beispiele konstruiert werden, wo der Limes inferior verschwindet.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Hodgkinson, J.: A class of triangle-functions. I. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 142—151 (1932).

Verf. untersucht Funktionen $w(u)$, welche Gleichungen der Form

$$w(u') = \frac{Aw(u) + B}{Cw(u) + D}$$

mit konstanten Koeffizienten A, B, C, D für jede Substitution $u'(u)$ der Gruppe einer Schwarzschen s -Funktion genügen. Es wird elementar gezeigt, daß die fraglichen Funktionen sich durch die Lösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung darstellen lassen, wenn sie sich nicht direkt auf elementare Funktionen reduzieren.

Myrberg (Helsinki)

Speiser, A.: Über beschränkte automorphe Funktionen. Comment. math. helv. **4**, 172—182 (1932).

Verf. betrachtet einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen F , deren Windungspunkte über den Punkten $w = 0, 1, \infty$ der w -Ebene liegen. Nach der allgemeinen Theorie kann eine solche Fläche durch eine auf F eindeutige und einwertige Funktion $f(w)$ auf ein schlichtes Gebiet konform abgebildet werden, welches entweder mit dem Innern des Einheitskreises (hyperbolischer Fall) oder mit der im Unendlichen

punktierten Ebene (parabolischer Fall) identisch ist. Zur Unterscheidung der beiden genannten Möglichkeiten geht der Verf. durch die inverse Funktion $z(w)$ der Legendreschen Modulfunktion $w(z)$ in die obere z -Halbebene über, wo der Fläche F ein Fundamentalbereich einer gewissen Hauptkreisgruppe G entspricht, welche in der Funktion $f(w(z))$ eine einwertige automorphe Funktion besitzt. Durch Anwendung eines bekannten Satzes von Blaschke über die Konvergenz der Abstände der Nullstellen einer im Einheitskreise beschränkten Funktion von der Kreisperipherie gelangt man fast unmittelbar zum Satz: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche F zum hyperbolischen Typus gehöre, besteht in der Konvergenz der Reihe $\sum 1/(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, erstreckt über alle unimodular geschriebenen Substitutionen $z' = \frac{az+b}{ez+d}$ der zu F gehörigen Gruppe G . Myrberg (Helsinki).

Grötzsch, Herbert: Über Extremalprobleme bei schlechter konformer Abbildung schlechter Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 84, 3—14 (1932).

Sei B ein schlechter Bereich der z -Ebene, der den unendlich fernen Punkt enthält. Es werden schlechte Abbildungen $w = f(z)$ von B mit der Normierung $f(\infty) = \infty$, $|f'(\infty)| = 1$ betrachtet. Sei ferner R eine ausgezeichnete Randkomponente von B , die nicht nur aus einem Punkt bestehen soll. In früheren Abhandlungen (Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 81) hat der Verf. unter Voraussetzung endlichen Zusammenhangs von B die Frage aufgeworfen und beantwortet, bei welchen Abbildungen der Durchmesser $D(\tilde{R})$ des Bildes \tilde{R} von R sein Maximum bzw. Minimum erreicht. Antwort: Bei den Maximalabbildungen ist \tilde{R} eine Strecke und die übrigen Randkomponenten des Bildes \tilde{B} von B sind Bögen auf Ellipsen, die die Endpunkte von \tilde{R} zu Brennpunkten haben. Bei den Minimalabbildungen ist \tilde{R} ein Kreis und die übrigen Randkomponenten von \tilde{B} gerade Schlitze, die nach dem Mittelpunkt von \tilde{R} hinweisen. In beiden Fällen gehen die Extremalabbildungen aus einer von ihnen durch Anwendung aller Kongruenztransformationen hervor. In der vorliegenden Abhandlung wird untersucht, inwieweit diese Resultate auf Bereiche unendlich hohen Zusammenhangs übertragen werden können. Es ergibt sich: Bei dem Maximalproblem kann das Resultat wörtlich übertragen werden, nur ist noch hinzuzufügen: \tilde{B} ist ein minimaler Ellipsenschlitzbereich. Dieser ist ähnlich zu definieren wie ein minimaler Kreisschlitzbereich (vgl. dies. Zbl. 3, 261). Wesentlich komplizierter ist der Tatbestand beim Minimumproblem. Dies ist schon daraus zu ersehen, daß \tilde{R} unter Umständen, trotzdem R linienhaft ist, nur aus einem Punkt bestehen kann und es dann offenbar wesentlich verschiedene, d. h. inkongruente, Extremumbildbereiche gibt. Es braucht aber nicht einmal ein Minimum zu existieren, wie der Verf. an einem instruktiven Beispiel zeigt. — In Zusatzbemerkungen wird das Minimumproblem im Fall des einfach zusammenhängenden Bereiches neu bewiesen. Ferner werden die Resultate durch lineare Transformation auf eine neue Form gebracht.

K. Löwner (Prag).

Grötzsch, Herbert: Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlechter Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 84, 15—36 (1932).

Es liege ein Bereich B der z -Ebene vor, der $z = \infty$ im Innern enthält. B werde sämtlichen Abbildungen $w = f(z)$ unterworfen, deren Entwicklung im Unendlichen mit den Gliedern beginnt $f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$. Den Hauptinhalt der vorliegenden Untersuchung bildet die Beantwortung der Frage: Welcher Werte ist der Koeffizient a_1 fähig? Antwort: Bekanntlich läßt sich B durch eine wie oben normierte Funktion $f_\varphi(z)$ auf einen Bereich B_φ abbilden, der von lauter geraden Schlitzern begrenzt ist, die mit der reellen Achse den Winkel φ bilden und der im Falle unendlich hohen Zusammenhangs von B außerdem minimal ist. Die Abbildung ist eindeutig. Der

Koeffizient $a_1 = a_1(\varphi)$ beschreibt mit variablem φ den Rand einer Kreisscheibe $K(B)$. Sie kann, falls alle Randkomponenten von B punktförmig sind, in einen Punkt ausarten. Dann fallen alle $f_\varphi(z)$ zusammen. Der Koeffizient a_1 eines allgemeinen $f(z)$ ist nun, so lautet die Antwort, auf die abgeschlossene Kreisscheibe $K(B)$ beschränkt. Ein innerer Punkt derselben wird von unendlich vielen Abbildungen geliefert, ein Randpunkt nur von einer bestimmten der oben gekennzeichneten Schlitzabbildungen. Beachtet man, daß bei Zusammensetzung von Abbildungen $f(z)$ die Koeffizienten a_1 sich additiv zusammensetzen, ferner, daß $a_1(\varphi)$ zu demjenigen Punkt auf der Peripherie von $K(B)$ gehört, dessen Radiusvektor vom Mittelpunkt des Kreises aus mit der positiven reellen Achse den Winkel 2φ einschließt, so ergeben sich folgende weitere Charakterisierungen der Schlitzabbildungen: a) Der Realteil von $a_1 e^{-2i\varphi}$ erreicht sein Maximum bei der minimalen φ -Schlitzabbildung und sein Minimum bei der minimalen $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ -Schlitzabbildung und nur bei diesen. b) Die minimalen φ -Schlitzabbildungen sind die einzigen Bereiche, für die die Gesamtheit der normierten konformen Abbildungen mit der speziellen Entwicklung $f(z) = z + * + \frac{a_2}{z^2} + \dots$ im Unendlichen sich auf die Identität $f(z) = z$ reduziert. Der Satz a) ist fast gleichzeitig von R. de Possel (vgl. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1931; dies Zbl. 3, 314) gefunden worden. — Bei der Beweisführung spielt die vom Verf. stammende „Parallelstreifenmethode“ eine wesentliche Rolle. Es wird ferner Gewicht darauf gelegt, reine Existenzbeweise zu vermeiden.

K. Löwner (Prag).

Grötzsch, Herbert: Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 84, 114—120 (1932).

Eine Abbildung $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ sei in einem Bereich \mathfrak{B} stetig und im Innern von \mathfrak{B} mit Ausnahme von isolierten Punkten stetig differenzierbar mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante. Einem kleinen Kreis um einen Punkte P im Innern, der kein Ausnahmepunkt ist, entspricht annähernd eine Ellipse. Die Abweichung des Verhältnisses der großen zur kleinen Achse derselben a/b von der Einheit soll als Maß für die Abweichung der Abbildung von der Konformität im Punkte P genommen werden. Ein Maß für die Abweichung von der Konformität in ganz \mathfrak{B} erhält man, indem man die obere Grenze Q von a/b in ganz \mathfrak{B} bildet und hiervon 1 subtrahiert. Die Fragestellungen, die in der Arbeit behandelt werden, sind von dem Typus: Gesucht werden Abbildungen eines gegebenen Bereiches \mathfrak{B}_1 auf einen gegebenen Bereich \mathfrak{B}_2 unter Bedingungen, die im allgemeinen mit Konformität nicht vereinbar sind und die durch die Forderung ersetzt wird, daß $Q - 1$ möglichst klein werden soll. Es werden die Fälle behandelt: 1. \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 seien 2 Rechtecke mit beliebigem Seitenverhältnis. Bei der Abbildung sollen die Eckpunkte von \mathfrak{B}_1 unter Erhaltung der Reihenfolge in die von \mathfrak{B}_2 übergehen. 2. \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 seien 2 Kreisinge mit beliebigem Radienverhältnis. 3. 2 Kreisscheiben. Es wird verlangt, daß ein irgendwie gegebenes Punktepaar aus \mathfrak{B}_1 in ein ebensolches Punktepaar in \mathfrak{B}_2 übergeht. 4. Bereiche wie in 3. Von der Abbildung wird verlangt, daß 2 beliebig vorgegebene Randpunkte von \mathfrak{B}_1 in ebensolche Punkte von \mathfrak{B}_2 und ein beliebig vorgegebener innerer Punkt von \mathfrak{B}_1 in einen ebensolchen Punkt von \mathfrak{B}_2 übergeht. In allen 4 Fällen werden die Extremalabbildungen angegeben. In einer Zusatzbemerkung wird eine Übertragung des Schwarzschen Lemmas auf Abbildungen, deren Abweichung von der Konformität einen vorgeschriebenen Wert nicht übersteigt, gegeben. — Die Arbeit schließt sich an zwei frühere Abhandlungen des Verf. [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 80 (1928) und 82 (1930)] an.

K. Löwner (Prag).

Smirnof, V.: Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Math. Ann. 107, 313—323 (1932).

Es wird bewiesen: Es sei B ein von einer geschlossenen rektifizierbaren Jordankurve Γ begrenztes (schlichtes) Gebiet und $z = \omega(\xi)$ bilde $|\xi| < 1$ auf B ab. Γ be-

sitze eine sich stetig drehende Tangente, und $\varphi(s)$ sei der Winkel, den die positive Richtung der Tangente mit der $+x$ -Achse bildet, als Funktion der Bogenlänge s .

1. Ist $\varphi(s)$ totalstetig und $|\varphi'(s)|^{p_1}$, $p_1 > 1$, L -integrabel, so existiert in $|\xi| \leq 1$ $\omega'(\xi)$, ist dort stetig und $\neq 0$ und auf $|\xi| = 1$ totalstetig. Ferner bleibt $\int_0^{2\pi} |\omega''(re^{i\vartheta})|^{p_1} d\vartheta$ unterhalb einer von r unabhängigen Schranke, so daß $\omega''(re^{i\vartheta})$ für fast alle ϑ bei nichttangentieller Annäherung in der Potenz p_1 integrable Randwerte hat, die fast überall $= \frac{d\omega'(e^{i\vartheta})}{d(e^{i\vartheta})}$ sind.

2. Sind $\varphi(s)$, $\varphi'(s)$ totalstetig und ist $|\varphi''(s)|^{p_1}$, $p_1 > 1$, integrabel, so ist $\omega''(\xi)$ in $|\xi| \leq 1$ vorhanden und stetig und auf $|\xi| = 1$ totalstetig. Ferner bleibt $\int_0^{2\pi} |\omega'''(re^{i\vartheta})|^{p_1} d\vartheta$ unterhalb einer von r freien Schranke.

Beides sind Verallgemeinerungen von Sätzen von W. Seidel (Math. Ann. **104**, 226), 1. insofern als dort zum Beweise der Existenz und Stetigkeit von $\omega'(\xi)$ in $|\xi| \leq 1$ und der Totalstetigkeit auf $|\xi| = 1$ die schärfere Voraussetzung gemacht wird, daß $\varphi(s)$ beschränkten Differenzenquotienten hat. Der 2. entsprechende Satz bei Seidel behauptet unter den gleichen Voraussetzungen etwas weniger.

S. Warschawski (Göttingen).

Saxer, Walter: Über die normalen Scharen meromorpher Funktionen mehrerer Variablen. Comment. math. helv. **4**, 256—267 (1932).

Verf. gibt hier den Beweis des in C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 479—480 angekündigten Hauptsatzes über normale Familien meromorpher Funktionen zweier Veränderlichen (vgl. dies. Zbl. **2**, 403). Zunächst einige Bezeichnungen: Eine meromorphe Funktion verhält sich in einem Bereiche B „regulär“, wenn sie dort als Singularitäten höchstens Pole, also keine wesentlich oder außerwesentlich singulären Stellen zweiter Art besitzt. Eine Folge in B regulärer meromorpher Funktionen $\zeta_1 = f_1(w, z)$, $\zeta_2 = f_2(w, z)$, ... ist gleichmäßig konvergent in B , falls die Punkte ζ_1, ζ_2, \dots auf der Riemannschen Zahlenkugel für jeden abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmäßig konvergieren. Konvergiert eine Folge im Innern einer Kugel, abgesehen von einer beliebig kleinen Umgebung des Mittelpunktes P , gleichmäßig und besitzt die Grenzfunktion in P eine außerwesentlich singuläre Stelle zweiter Art, so heißt P ein außerwesentlich irregulärer Punkt der Folge. Eine Familie in B regulärer meromorpher Funktionen ist in B normal, falls in jeder aus Funktionen der Familie gebildeten Folge mindestens eine in B gleichmäßig konvergente Teilfolge existiert. Einen Punkt P , in dessen (voller) Umgebung die Familie sich nicht mehr normal verhält, heißt ein irregulärer Punkt, und zwar heißt P wesentlich irregulär, falls nicht alle in der Umgebung (abgesehen von P) gleichmäßig konvergenten Folgen den Punkt P als außerwesentlich irregulären Punkt besitzen. Über die wesentlich irregulären Punkte einer meromorphen Familie gilt jetzt wörtlich der zuerst von Hartogs für analytische, von E. E. Levi für meromorphe Funktionen und schließlich von G. Julia für normale Familien analytischer Funktionen bewiesene „Kontinuitätssatz“, der bisher die Grundlage für sämtliche Untersuchungen der Singularitäten bzw. der irregulären Punkte von Funktionen bzw. Funktionsfamilien bildet; er lautet in diesem Falle: „Eine Familie meromorpher Funktionen sei normal in jedem Punkte $w = 0, 0 < |z| < r$, jedoch wesentlich irregulär in $0, 0$. Dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ derart, daß zu jedem $|w_0| < \varepsilon$ mindestens ein $|z_0| < \eta$ gehört, so daß die gegebene Familie im Punkte w_0, z_0 wesentlich irregulär wird. Es erübrigt sich, die aus diesem Satze sich ergebenden Folgerungen anzugeben, die hier wörtlich die gleichen sind wie im bekannten Falle einer analytischen oder meromorphen Funktion bzw. einer normalen Familie analytischer Funktionen. [Literatur hierzu: Hartogs, Math. Ann. **62** (1905), Münch. Sitzgsber. **36** (1906); E. E. Levi, Ann. di Mat. **17** u. **18** (1909 u. 1910); Julia, Acta math. **47** (1925).]

Thullen.

Fueter, Rud.: Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comment. math. helv. 4, 9—20 (1932).

Verf. definiert in seiner Arbeit eine neue Klasse von Funktionen einer Quaternionenvariablen, welche im gewissen Sinne als eine direkte Verallgemeinerung der Klasse der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen angesehen werden kann. Indem der Verf. sich hier der Kürze halber auf eine reduzierte Quaternionenvariable $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$ beschränkt, betrachtet er reelle Funktionentripel u_0, u_1, u_2 der reellen Variablen x_0, x_1, x_2 , welche in einem Raumteil Ω endlich, stetig und stetig differenzierbar sind. Unter diesen Voraussetzungen heißt

$$w = f(z) = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2$$

eine analytische Funktion der Quaternionenvariablen z in Ω , wenn wenigstens zwei der Differentialgleichungen

$$u_\mu^{(0)} u_\nu^{(0)} + u_\mu^{(1)} u_\nu^{(1)} + u_\mu^{(2)} u_\nu^{(2)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} \mu, \nu = 0, 1, 2 \\ \mu \neq \nu \end{matrix} \right) \quad (\text{I})$$

oder wenigstens zwei der Differentialgleichungen

$$u_0^{(\mu)} u_0^{(\nu)} + u_1^{(\mu)} u_1^{(\nu)} + u_2^{(\mu)} u_2^{(\nu)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} \mu, \nu = 0, 1, 2 \\ \mu \neq \nu \end{matrix} \right) \quad (\text{II})$$

erfüllt sind, wo $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\alpha} = u_\lambda^{(\alpha)}$ gesetzt ist und in (I):

$u_\lambda^{(0)2} + u_\lambda^{(1)2} + u_\lambda^{(2)2} \equiv 0$, $\lambda = 0, 1, 2$, in (II): $u_0^{(\alpha)2} + u_1^{(\alpha)2} + u_2^{(\alpha)2} \equiv 0$, $\alpha = 0, 1, 2$ ist. Verf. untersucht dann genauer diejenige spezielle Klasse der obigen Funktionen, welche den beiden Bedingungen (I) und (II) gleichzeitig genügen. Solche Funktionen, welche der Verf. hyperanalytisch nennt, können in mannigfacher Weise mittels gewöhnlicher analytischer Funktionen gebildet werden. Ist z. B. $\xi + i\eta = w$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x_0 + iy$, so geht dieselbe durch die Substitution

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad i = \frac{x_1 i_1 + x_2 i_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

in eine hyperanalytische Funktion $w = \xi + \frac{\eta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (x_1 i_1 + x_2 i_2)$ von $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$ über. Myrberg (Helsinki).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik:

● **Kamke, Erich:** Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Leipzig: S. Hirzel 1932. VII, 182 S. u. 2 Abb. RM. 10.—.

Das Buch stellt einen Ausschnitt aus dem Gesamtgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar: Es werden nur diskontinuierliche, also keine geometrischen Verteilungen betrachtet. Großer Wert wird auf die Grundlagenfrage und die Existenzbeweise gelegt. Dabei fußt der Verf. zum Teil auf der Misesschen Häufigkeitstheorie. Doch wird die in den Misesschen Arbeiten und Büchern sog. „zweite Forderung“, daß der Grenzwert der relativen Häufigkeit unempfindlich sei gegen Stellenauswahl, fallengelassen; die Begriffsbildungen des Verf. gestatten daher eine Anwendung auch auf innermathematische Problemkreise. — Eine einfach unendliche Folge von Ereignissen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots$ wird als \mathfrak{E} -Folge \mathfrak{E} bezeichnet. \mathfrak{E} kann insbesondere eine Zahlenfolge sein. $h_n(\mathfrak{E}, m)$ sei die relative Häufigkeit der mit dem Merkmal m behafteten Elemente unter den ersten n Ereignissen. Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\mathfrak{E}, m) = w(\mathfrak{E}, m)$, so heißt

\mathfrak{E} eine W -Folge und $w(\mathfrak{E}, m)$ die „Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von m in \mathfrak{E} “. Der erste Teil des Buches bringt die Verknüpfung endlich vieler, der zweite Teil unendlich vieler W -Folgen. — Die in der Misesschen Theorie als „Mischung“ bzw. „Teilung“ bezeichneten Grundoperationen werden zu „Additionsgesetzen“ bzw. zum „Divisionsgesetz“ zusammengefaßt. Ausführlich werden die „Multiplikationsgesetze“ behandelt. Zu ihrer Begründung wird folgende Terminologie entwickelt: Es seien k \mathfrak{E} -Folgen $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \dots, \mathfrak{E}^{(k)}$ gegeben. Unter der „Folgenverbindung“ $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' \dots \mathfrak{E}^{(k)}$ wird die Folge verstanden, deren λ -tes Element \mathfrak{E}_λ das System der geordneten Ereignisse $\mathfrak{E}'_\lambda, \mathfrak{E}''_\lambda, \dots, \mathfrak{E}^{(k)}_\lambda$ ist. Man sagt, auf \mathfrak{E}_λ treffe die „Merkmalverbindung“ $m = m' m'' \dots m^{(k)}$ zu, wenn auf \mathfrak{E}'_λ das Merkmal $m^{(v)}$ (für $v = 1, \dots, k$) zutrifft. (Bei Mises: Verbindung von Kollektivs!) Die „Relativverbindung“ \mathfrak{E} zweier Folgen \mathfrak{E}' und \mathfrak{E}'' wird so definiert: Man setze zu allen Elementen von \mathfrak{E}' , die mit einem Merkmal m' behaftet sind, der Reihe nach die Elemente von \mathfrak{E}'' . Die

Glieder der entstehenden neuen Folge \mathfrak{E} bestehen dann teils aus Einzelereignissen von \mathfrak{E}' , teils aus geordneten Ereignispaaren $\mathfrak{E}'_\lambda \mathfrak{E}''_\mu$. Endlich wird als ein dritter Prozeß die „Aussonderung“ aus \mathfrak{E}'' mit Rücksicht auf das Vorkommen des Merkmals m' in \mathfrak{E}' definiert (bei Mises: Auswürfeln!): Aus \mathfrak{E}'' wird eine Teilfolge gebildet, und zwar läßt man in \mathfrak{E}'' ein Glied \mathfrak{E}''_λ nur dann stehen, wenn \mathfrak{E}'_λ mit m' behaftet ist. Schließlich der Begriff der Unabhängigkeit: \mathfrak{E}' enthalte unendlich viele Glieder mit dem Merkmal m' , \mathfrak{E}'' sei W -Folge in bezug auf m'' . \mathfrak{E} sei die Folge, die aus \mathfrak{E}'' mit Hilfe von \mathfrak{E}' , m' ausgesondert werde. Ist sie W -Folge in bezug auf m'' und ist $w(\mathfrak{E}, m'') = w(\mathfrak{E}'', m'') = w'' \neq 0$ und stellt sich heraus, daß $w(\mathfrak{E}' \mathfrak{E}'', m' m'') = w' w''$, so ist w' unabhängig von \mathfrak{E}'', m'' und w'' unabhängig von \mathfrak{E}', m' . Er kann dazu dienen, die Unempfindlichkeit einer Wahrscheinlichkeit gegen gewisse Auswahlverfahren nachzuweisen. Eine Reihe klassischer Beispiele, vor allem aus dem Gebiet der Spiele, werden kritisch dargestellt. Beispiele aus Physik oder Statistik fehlen. Ein letzter Paragraph dieses ersten Teiles bringt Mittelwert und Streuung. — Der zweite Teil baut sich ganz auf dem Begriff des „ W -Feldes“ auf: Ordnet man die Elemente von abzählbar unendlich vielen \mathfrak{E} -Folgen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}' \dots$, in Form einer Matrix derart an, daß in der r -ten Zeile die Glieder von $\mathfrak{E}^{(r)}$ stehen: $\mathfrak{E}_1^{(r)}, \mathfrak{E}_2^{(r)}, \dots$, so entsteht das „ \mathfrak{E} -Feld“. Es heißt „ W -Feld“ in bezug auf die Merkmale m', m'', \dots , wenn a) jedes $\mathfrak{E}^{(r)}$ W -Folge in bezug auf $m^{(r)}$ und b) für jede natürlich Zahl k

$$w(\mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' \dots \mathfrak{E}^{(k)}, m' m'' \dots m^{(k)}) = w(\mathfrak{E}', m') \dots w(\mathfrak{E}^{(k)}, m^{(k)})$$

ist. Die Existenz solcher W -Felder wird nachgewiesen mit Hilfe eines Satzes von Tornier, der die Existenz einer W -Folge mit vorgeschriebener Verteilung w_1, w_2, \dots für ebenso viele Merkmale m_1, m_2, \dots ausspricht ($w_r \geq 0, \sum w_r \leq 1$, wobei das Zeichen „ $<$ “ nur bei unendlicher Verteilung gilt). Auch für die Verbindung unendlich vieler \mathfrak{E} -Folgen gelten unter geeigneten Voraussetzungen scharf formulierte Multiplikationsgesetze. Sie sind vor allem zur Behandlung innermathematischer Aufgaben geeignet: Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein Bruch nicht kürzen läßt (Tschebyscheffsches Problem!), ferner, daß eine Zahl der natürlichen Zahlenfolge durch keine Quadratzahl >1 teilbar ist, daß eine Zahl der natürlichen Zahlenfolge Primzahl ist. — Sind in bezug auf ein Merkmal m alle $w(\mathfrak{E}^{(r)}, m)$ eines W -Feldes einander gleich, so heißt das W -Feld ein „Bernoullisches W -Feld“. Für diese Felder werden die Grenzwertsätze behandelt (Formeln von Bernoulli, Laplace und Poisson). Nunmehr wird die „Bernoullische W -Folge“ eingeführt: Ist \mathfrak{E} W -Folge in bezug auf m , so teile man \mathfrak{E} in Serien von je k aufeinanderfolgenden Gliedern; die r -ten Elemente ($r = 1, \dots, k$) dieser Teilserien reihe man zu einer Teilfolge $\mathfrak{E}^{(r)}$ zusammen: $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{E}_{k+r}, \mathfrak{E}_{2k+r}, \dots$. \mathfrak{E} heißt Bernoullische W -Folge, wenn für jede natürliche Zahl k $w(\mathfrak{E}^{(r)}, m) = w(\mathfrak{E}, m)$ ist. Die Existenz solcher Folgen wird nach Copeland [Amer. J. Math. 50 (1928)] nachgewiesen. Die Menge der Bernoullischen W -Folgen hat bei fester Wahrscheinlichkeit w die Mächtigkeit des Kontinuums. — Es folgt das Gesetz der großen Zahlen und als Abschluß ein Abriß der Lexisschen Dispersionstheorie.

Rehbock (Bonn).

Lyche, R. Tambs: Die Ausdehnung des Schattens, der von einer homogenen Kugelschar auf eine Ebene geworfen wird. Norsk. Vid. Selsk., Forh. 4, 55—57 (1931).

In einem Volumen V seien sehr viele undurchdringliche und undurchsichtige Kugeln gleicher Größe gleichmäßig (im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne) verteilt. Der Durchmesser der Kugeln sei so klein, daß das Gesamtvolumen der Kugeln klein gegen V ist. Man denke sich nun diesen Kugelhaufen durch paralleles Licht beleuchtet. Gefragt wird nach dem Flächeninhalt des Schattens des Haufens auf einer zur Lichtstrahlrichtung senkrechten Ebene. Dieser Inhalt wird durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen bestimmt und eine einfache Näherungsformel dafür angegeben.

W. Fenchel (Göttingen).

Aitken, A. C.: A note on mathematical expectation. Math. Notes Nr 27, XV—XVI (1932).

Ono, Suminosuke: On vector quantity. II. Vector quantity is reducible from a kind of probability. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 85—95 (1931).

Vgl. dies. Zbl. 2, 145.

Neyman, J., und E. S. Pearson: On the problem of k samples. C. R. Soc. Sci. Varsovie 24, 122—126 (1932) [Polnisch].

Voranzeige der bereits in dies. Zbl. 4, 157 referierten Arbeit gleichen Titels.

Birnbaum (Wien).

Wilks, S. S.: Moments and distributions of estimates of population parameters from fragmentary samples. Ann. math. Statist. **3**, 163—195 (1932).

Das Wort „fragmentary“ ist hier so aufzufassen, daß zwei Eigenschaften (durch x und y ausgedrückt) einer statistischen „Bevölkerung“ nicht bei allen Individuen gleichzeitig beobachtet worden sind. Das Material zerfällt dadurch in drei Abteilungen: ω_{xy} , wo beide Eigenschaften notiert sind, und ω_x und ω_y , wo nur die eine notiert ist. Die Aufgabe ist nun, dieses Material zur Bestimmung der „population parameters“ (d. h. die Mittelzahlen a und b , die mittleren Fehler σ_x und σ_y und die Korrelation r) zu verwerten. (Normale Verteilung vorausgesetzt.) Gedankengang und Bezeichnungen stimmen mit R. A. Fisher [The mathematical foundations of theoretical statistics. Philos. Trans. Roy. Soc. London **222**, 309 (1922)] überein.

Es wird eine Reihe von Spezialaufgaben wie z. B. folgende behandelt: Gegeben σ_x, σ_y und r , gefunden werden die besten Werte von a und b . Gegeben a, b und r , gefunden werden die besten Werte von σ_x und σ_y usw. — Numerische Anwendungen kommen nicht vor.

Burrau (Kopenhagen).

Wilks, S. S.: On the sampling distribution of the multiple correlation coefficient. Ann. math. Statist. **3**, 196—203 (1932).

Als Beitrag zur Lösung derselben Aufgabe für mehrere Eigenschaften wie die im vorangehenden Referat behandelte Aufgabe für zwei Eigenschaften hat R. A. Fisher 1928 (Proc. Roy. Soc. London **121**, 654) eine Bestimmung der „multiple correlation coefficient“ gegeben, jedoch unter Anwendung geometrischer Methoden. Dasselbe Resultat wird hier als eine Folge der Abhandlung von J. Wishart: The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population. Biometrika **20 A**, 32, abgeleitet.

Burrau (Kopenhagen).

Adyanthaya, N. K.: A formula for the spurious correlation between two functions of mutually uncorrelated variables. J. Indian Math. Soc. **19**, 161—164 (1932).

K. Pearson has (Proc. Roy. Soc. London **60**) given a formula for the spurious correlation between two indices x/y and z/y and this formula wishes N. K. Adyanthaya to generalize to two functions $u = f(x_1 x_2)$ and $v = \Phi(x_3 x_4)$. — At first A. expresses the two functions product moment with coefficients of correlation (r_{ij}) and standard deviations (σ_i) as

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} r_{13} \sigma_1 \sigma_3 + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_4} r_{14} \sigma_1 \sigma_4 + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} r_{23} \sigma_2 \sigma_3 + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_4} r_{24} \sigma_2 \sigma_4 + \dots$$

up to terms of the 2nd order, neglecting terms of higher orders, and, when f and Φ are identical, $x_1 \equiv x_3$ and $x_2 \equiv x_4$, similar expresses for σ_u^2 and σ_v^2 which last two formulas give the variances of the functions u, v resp. — From these starting-point A. shows, that it is possible to derive the formula for the spurious correlation between the two functions, that is

$$\frac{\{uv\} - \{u\}\{v\}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} \cdot \sigma_2^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_2}\right)^2 \sigma_2^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3}\right)^2 \sigma_3^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_4}\right)^2 \sigma_4^2}}$$

where $\{\}$ denote the mean, and under the assumption that x_1, x_2, x_3 are so chosen that they are mutually uncorrelated. — By putting $u = x_1/x_2$ and $v = x_3/x_2$ in this general result, we come to the same result as Pearson. — The formulas show that it is possible to find a correlation coefficient as high as 0,5 even when there is no correlation at all, merely owing to the peculiarity of the arithmetic. — Finally it is shown that the correlation between $\Psi(x)$ and $\Psi(y)$ is the same as between x and y (up to terms of the second order) and in the same manner respectively between $x_1/x_2, x_3/x_2$ and $\Psi(x_1/x_2), \Psi(x_3/x_2)$.

Kaj Christensen (København).

Risser, R.: De la dispersion afférente à n erreurs dans le cas où chacune des erreurs composantes est régie par une loi simple. Essai d'une représentation analytique. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 435—437 (1932).

Es werden die Summen unabhängiger Fehler betrachtet, von denen jeder auf das Intervall $-a, +a$ mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte $1/2a$ fällt. Exakte und angenäherte Ausdrücke, erzeugende Funktion usw.; Verallgemeinerung, wobei Fehler mit verschiedenen Variationsgrenzen $(-a, +a; -b, +b, \dots)$ betrachtet werden.

Bruno de Finetti (Trieste).

Hendricks, Walter A.: Relative residuals considered as weighted simple residuals in the application of the method of least squares. Ann. math. Statist. 3, 157—162 (1932).

Geometrie.

● **Grossmann, Marcel:** Darstellende Geometrie. Abbildungsverfahren, Kurven und Flächen. 3. Aufl. (Teubners math. Leitfäden. Bd. 3.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. IV, 153 S. u. 144 Fig. RM. 3.80.

Stamm, Edward: Geometria euclideo in spatio limitato. Wiadom. mat. 33, 37—42 (1931).

Stamm, Edward: Der visuelle Raum und euklidische Geometrie. Wiadom. mat. 33, 83—93 (1931).

Unter „euklidischer Geometrie im beschränkten Raumstück“ versteht der Verf. im Gegensatz zur üblichen Terminologie ein in einem beschränkten Raumstück Platz findendes Modell für die Hilbertschen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome und das Parallelenaxiom. Ein solches, eine Kugel ausfüllendes Modell wird in beiden Arbeiten in gleicher Weise erörtert. Ausgehend von der Behauptung, daß einem „unbeweglichen, allseitigen Auge“ die Geraden als Kreisbögen von konstanter Sehnenlänge „erscheinen“, schließt der Verf. in der letztgenannten Arbeit, der „visuelle Raum“ sei, da er mit dem erörterten Modell identisch sei, euklidisch.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Matsumura, Sôji: A remark on imaginary elements in geometry. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 14, 310 (1932).

Rindi, Scipione: Sopra n punti in linea retta. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 472—478 (1932).

Es wird ein Satz von O. Hesse verallgemeinert (er ergibt sich für $n = 4$ aus dem Folgenden): $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ seien die Gleichungen von n ($n \geq 3$) verschiedenen Punkten einer Geraden. Dann gibt es ein und bis auf einen Proportionalitätsfaktor nur ein System von Zahlen k_1, \dots, k_n , so daß $k_1 u_1^{n-2} + \dots + k_n u_n^{n-2} \equiv 0$ ist. Umgekehrt, wenn n Punkte diese Bedingung erfüllen, liegen sie auf einer Geraden.

Köthe (Münster).

Deaux, R.: Sur la transformation circulaire directe. Mathesis 46, 264—282 (1932).

Die eigtl. Kreisverwandtschaft als quadratische Verwandtschaft der metrischen Geometrie. 1. Die Fixpunkte einer durch drei Paare zugeordneter Punkte bestimmten Verwandtschaft werden als Brennpunkte eines Hilfskegelschnittes konstruiert. (Fokaleigenschaften dieses Kegelschnittes und der konfokalen Kegelschnitte.) 2. Die harmonischen Polygone Caley's werden als zyklische Punktgruppen einer Kreisverwandtschaft von vorgegebener Potenz ($T^n = 1$) untersucht. (Lemoinescher Punkt, Brocardscher Kreis und Brocardsche Punkte des Polygons.) 3. Anwendung der Kreisverwandtschaft von der Potenz 3 in der neueren Dreiecksgeometrie. Z. B. es sei: $\triangle N'A_2M \sim \triangle MN'A_1$ und A_1 beschreibe eine Kurve C . Wie bewegt sich A_2 ? (Fortsetzung diesbezüglicher Untersuchungen von Neuberg und Blindow.) *E. A. Weiss*.

Jolles, Stanislaus: Die Metrik im polaren F^2 -Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz. Math. Z. 36, 35—98 (1932).

In einer Reihe ausführlicher Abhandlungen hat der Verf. die synthetische projektive Theorie der linearen Strahlenkongruenzen zurückgeführt auf die Betrachtung

der ∞^3 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen 2. Ordnung. Auf derselben methodischen Grundlage wird nun die metrische Diskussion begonnen. Zunächst werden unter jenen Regelscharen diejenigen bestimmt, die metrische Besonderheiten aufweisen, z. B. rotatorisch sind. Dabei spielt dasjenige F_2 -Büschel der Kongruenz eine Rolle, das die drei Symmetrieachsen der Kongruenz zu gemeinsamen Achsen hat („Antidurchmesserbüschel“). Ferner wird die Gesamtheit aller Symmetrieebenen aller anfangs erwähnter Regelscharen („Achsenebenen“) untersucht. Sie sind (was schon früher bekannt war) Tangentialebenen des Fokalparaboloids der Kongruenz. Neu bewiesen wird, daß umgekehrt jede solche Tangentialebene gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels von Regelscharen der Kongruenz ist. Die Gesamtheit der Achsen jener Regelscharen bildet den Hauptachsenkomplex der Kongruenz und läßt das zugehörige Zylindroid unter neuen Gesichtspunkten erscheinen. — Da die Darstellung der Abhandlung knapp gehalten ist und die Ergebnisse früherer Arbeiten weitgehend vorausgesetzt werden, ist die Mannigfaltigkeit der Resultate sehr groß, und dieses Referat gibt nur einen etwas willkürlichen Ausschnitt. *Cohn-Vossen (Köln).*

Haenzel, Gerhard: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz und ihre Gerade-Kugel-Transformation. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **42**, 75—84 (1932).

Im ersten Abschnitt der Arbeit wird die von Jolles synthetisch angewandte Methode der Betrachtung einer linearen Strahlenkongruenz analytisch begründet nach denselben Gesichtspunkten, wie sie in diesem Zbl. **2**, 146 beim Referat der Jollesschen Arbeit angedeutet sind. Dabei werden die Geraden der Kongruenz auf die Punkte einer Fläche 2. Ordnung abgebildet, jeder ebene Schnitt dieser Fläche entspricht den Geraden einer in der Kongruenz enthaltenen Regelschar 2. Ordnung; die in zwei ebene Geradenbüschel zerfallenden in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen 2. Ordnung werden durch den Schnitt der darstellenden F_2 mit einer Tangentialebene wiedergegeben, so daß also jede auf der F_2 verlaufende Gerade ein in der Kongruenz enthaltenes Geradenbüschel darstellt. In den beiden folgenden Abschnitten wird dieser Tatbestand einem interessanten Abbildungsverfahren unterworfen. Zunächst wird die erwähnte F_2 als Kugel angenommen (was eine komplexe Kollineation erfordert, falls man von der reellen Darstellung einer hyperbolischen Kongruenz ausgeht), und diese Kugel wird stereographisch auf eine Ebene projiziert. Dann werden in dieser Ebene die Kreise und Geraden die Bilder der in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen 2. Ordnung sein. Zwei solche Regelscharen, die nach Jolles füreinander autopolar sind, d. h. deren jede bei Polarkorrelation an der anderen in sich übergeht, werden durch Orthogonalkreise abgebildet, den ebenen Geradenbüscheln der Kongruenz entsprechen in der Bildebene die Punkte einer isotropen Geraden; wie immer bei stereographischer Projektion im Komplexen hat man der Ebene zwei uneigentliche isotrope Geraden zuzuschreiben, die sich im reellen unendlich fernen Punkt schneiden. — Kreise, die einander berühren, bilden Regelscharen ab, die einander ebenfalls längs einer gemeinsamen Geraden berühren. Nachdem so die Ebene als Bild der Geradenkongruenz aufgefaßt ist, wird dieselbe Ebene auch zum Bild einer Kugelkongruenz gemacht, d. h. eines Systems von Kugeln, die zwei im Raum feste Kugeln berühren. Wenn man nämlich über die Lage jener beiden Kugeln und die Art der Berührung durch die Kugeln der Kongruenz geeignete Festsetzungen trifft, so liegen die Mittelpunkte der Kugel der Kongruenz auf einem Rotationsellipsoid G_2 , so daß die Brennpunkte der erzeugenden Ellipse mit den Mittelpunkten der „Leitkugeln“ und die doppelte große Achse mit der Differenz der Leitkugelradien zusammenfallen. Durch Affinität wird nun G_2 in die Kugel F_2 , diese wie vorher durch stereographische Projektion auf die Ebene abgebildet, und dadurch wird jeder Punkt der Ebene Bild des Mittelpunktes einer Kugel der Kongruenz. Eine solche Kugel ist aber durch ihren Mittelpunkt eindeutig festgelegt. Es zeigt sich nun, daß den Kreisen der Ebene hierbei die in der Kongruenz enthaltenen (d. h. von ∞^1 Kongruenzkugeln umhüllten) Dupin-Zykliden entsprechen. Zwei einander berührende Kreise ergeben zwei Dupin-Zykliden, die einander längs einer gemeinsamen

kreisförmigen Krümmungslinie berühren. Ersichtlich ist die hier vermittelte Abbildung einer Geradenkongruenz auf eine Kugelkongruenz einer Lieschen Geraden-Kugeltransformation, und aus den erwähnten Berührungsrelationen kann man entnehmen, daß bei allen in Frage kommenden Figuren die Haupttangentenkurven in die Krümmungslinien der Bildfigur transformiert werden.

Cohn-Vossen (Köln).

Kollros, L.: Suites récurrentes de cercles et de sphères. Comment. math. helv. 4, 97—101 (1932).

a, b seien zwei Kugeln, b liege im Innern von a , ohne a zu berühren oder mit a konzentrisch zu sein. c sei irgendeine Kugel, die a und b berührt. x_1 sei irgendeine Kugel, die a, b, c berührt (es gibt bekanntlich eine einparametrische Schar solcher Kugeln), x_i ($i = 2, 3, \dots$) sei eine Folge von Kugeln, deren jede a, b, c, x_{i-1} berührt, also eine durch a, b, c, x_1 festgelegte Figur. Eine solche Folge $F(x_1)$ heißt periodisch, wenn eine Kugel x_i ($i > 1$) mit x_1 zusammenfällt. Dann hat Steiner den Satz aufgestellt: Die Periodizität hängt nicht von der Wahl von x_1 und c ab, sondern nur vom Verschwinden eines in den Radien und dem Mittelpunktsabstand von a und b ganz rationalen Ausdrucks. Für diesen Satz und ähnliche Sätze gibt Verf. sehr einfache Beweise, die darauf beruhen, a und b durch eine Kugelverwandtschaft in konzentrische Kugeln zu verwandeln; der erwähnte Ausdruck erweist sich, wie es sein muß, als invariant gegenüber Kugelverwandtschaften.

Cohn-Vossen (Köln).

Coxeter, H. S. M.: The polytopes with regular-prismatic vertex figures. Pt. II. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 126—189 (1932).

Die Arbeit ist der zweite Teil einer ausführlichen Untersuchung über die Polytope [siehe Philos. Trans. Roy Soc. London (A) 229, 329—425 (1930)]. Durch Verallgemeinerung des Schläfli'schen Symbols und Betrachtung der Schnitt- und Eckfiguren werden die Existenz gewisser gleichförmiger Polytope sichergestellt und ihre Eigenschaften untersucht. Um die durch sie bestimmten Gruppen aufstellen zu können, untersucht der Verf. die sphärischen (und als Spezialfall die Euklidischen) Simplexe, deren Winkel rationale Bruchteile von π sind. Ihre Aufzählung gelingt durch den Schläfli'schen Determinantensatz. Die Gruppen nun, deren Fundamentalbereiche Simplexe sind, werden erzeugt durch Spiegelungen an den Hyperebenen, von denen diese Simplexe auf der Hypersphäre ausgeschnitten werden. So kommt man auf zum Teil bekannte Gruppen, die auf diesem Wege abstrakt definiert werden können. Nachdem der Zusammenhang mit den gleichförmigen Polytopen hergestellt ist, kann als Hauptergebnis bewiesen werden, daß jede Gruppe von reellen orthogonalen Substitutionen in m Variablen, deren Fundamentalbereich ein Simplex ist, dessen Winkel rationale Bruchteile von π sind, die volle Symmetriegruppe eines m -dimensionalen gleichförmigen Polytopes ist oder eine Untergruppe davon. Eine der oben behandelten Gruppen ist die Automorphismengruppe der Geraden einer kubischen Fläche, eine andere diejenige der Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte drei. Diese beiden Gruppen werden durch zwei Operationen definiert. Zum Schluß wird die Theorie der Tangentenebenen an gewisse Raumkurven ebenfalls in Zusammenhang mit einigen der gefundenen Gruppen gebracht. Im Anhang wird u. a. der Satz über die umschriebene Kugel eines gleichförmigen Polytopes bewiesen, und es werden ausgeartete gleichförmige Polytope untersucht.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Morin, Ugo: Contributi alla geometria degli S_k di S_n . Rend. Semin. mat. Univ. Padova 3, 82—94 (1932).

Es ist üblich, die Unterräume S_k eines n -dimensionalen Raumes S_n mit den Punkten einer (Grassmannschen) V_d eines Raumes S_N eineindeutig darzustellen, wo $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$ und $d = (n - k)(k + 1)$. Der vollständige Durchschnitt V_t der V_d mit einem Raume S_{N-k} ist das Bild eines Linearsystems Σ von S_k ; im allgemeinen ist $t = d - h$. Wenn aber $t = d - h + \sigma$ ist, so heißt σ Überschuß („Sovrabbondanza“) von Σ ; und Σ wird ein überschüssiges („Sovrabbondante“) S_k -Linearsystem genannt

[s. A. Comessatti, Atti Ist. Veneto **80**₂ (1920—1921)]. Für das Linearsystem aller S_k die mit einem gegebenen S_h einen S_l gemein haben, findet man leicht:

$$\sigma = \sum_{s=0}^l \binom{h+1}{s} \binom{n-h}{k-s+1} - (n-k-h+l)(l+1) \geq 0.$$

Zwei oder mehrere S_k heißen linear abhängig (oder unabhängig), wenn dies der Fall für ihre Bildpunkte im S_N ist. Von diesem Begriff ausgehend, und mit einfachen synthetischen Überlegungen, findet der Verf. einige Sätze über Systeme von linear abhängigen S_k ; es folgt eine Anwendung zur Bestimmung aller möglichen Konfigurationen von vier linear abhängigen S_k . Interessant ist die Bestimmung aller ∞^1 S_k -Linearsysteme, für die σ den größten Wert annimmt: es sind die ∞^1 S_k einer normalen rationalen (nicht konischen) V_{k+1}^{n-k} (für $k=1$ findet man den Satz schon bei A. Comessatti, loc. cit.). Am Ende ein Satz über $h+3$ linear abhängige S_k ($h \leq k$), die paarweise einen S_{k-h-1} höchstens gemein haben: sie gehören zu einem normalen und rationalen S_{k-h-1} -Kegel V_{h+1}^{k+1} . *E. G. Togliatti* (Genova).

Ascoli, Guido: Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari. II. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 203—232 (1932).

Fortsetzung der in Bd. **3**, 409 referierten Arbeit. Es wird bewiesen, daß in einem separablen, linearen, metrischen Raume S jeder konvexe Körper in jedem Begrenzungs-punkte eine Stütz-Hyperebene hat, und daraus wird eine Reihe von einfachen Folgerungen gezogen. Es wird die Aufgabe behandelt: Ist M eine Menge von Punkten von S , und ist jedem Punkte x von M eine Zahl c_x zugeordnet, eine in S additive stetige Funktion zu finden, die in den Punkten x von M die Werte c_x annimmt; es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit dieser Aufgabe angegeben. Beweis der Sätze: Jede lineare Mannigfaltigkeit in S ist vollständiger Schnitt einer abzählbaren Menge von Hyperebenen. Die Punkte von S können dargestellt werden durch eine abzählbare Menge von Koordinaten, die additive, stetige Funktionen der Punkte sind. Jeder konvexe Körper in S , der den Nullpunkt im Innern enthält, kann dargestellt werden durch abzählbar viele Ungleichungen $A_i(x) \leq 1$, wo die $A_i(x)$ additive, stetige Funktionen bedeuten. — Die Punkte $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ heißen eine Basis von S , wenn die Menge der als Linearkombination endlich vieler u_n darstellbaren Punkte dicht in S ist; die Basis heißt reduziert, wenn keiner ihrer echten Teile eine Basis ist. Es wird gezeigt, wie aus einer beliebigen Basis eine reduzierte Basis gewonnen werden kann. — Ist Γ ein konvexer Körper in S , der den Nullpunkt im Innern enthält, so gibt es eine Folge $A_n(x)$ additiver, stetiger Funktionen in S , so daß, wenn $B(x) = 1$ eine Stütz-Hyperebene von Γ ist, die additive, stetige Funktion $B(x)$ Limes einer Folge endlicher Linearkombinationen $\sum \lambda_i A_{n_i}(x)$ der $A_n(x)$ ist, deren Koeffizienten $\lambda_i \geq 0$ sind und die Summe 1 haben. Daraus folgt insbesondere: Macht man den zu S dualen Raum Σ der linearen, stetigen Funktionen $A(x)$ in S zu einem Limesraum durch die Festsetzung: $A_n(x) \rightarrow A(x)$, wenn in ganz S gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x)$, so ist Σ separabel (was bei der üblichen Metrik des dualen Raumes nicht der Fall ist). — Die Untersuchungen stehen, wie der Verf. nachträglich bemerkte, in nahen Beziehungen zu Arbeiten von Banach, Hahn und Helly. *Hans Hahn* (Wien).

Algebraische Geometrie:

Godeaux, Lucien: Remarques sur les courbes algébriques de genre cinq. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **1**, 119—122 (1932).

Etude des courbes algébriques de genre cinq, non hyperelliptiques, admettant une transformation birationnelle en elles-mêmes, dépourvue de points doubles. Ces courbes sont de deux espèces: celles de la première espèce ne possèdent pas en général d'autre involution; celles de la seconde possèdent deux involutions elliptiques d'ordre deux, permutables entre elles et avec l'involution donnée. *P. Dubreil* (Lille).

Panetti, M.: Costruzione geometrica del fuoco di un bipiano e dell'ala equivalente. *Atti Accad. Sci. Torino* **67**, 155—164 (1932).

Ichida, Asajiro: A theorem on algebraic curves in space. *Tôhoku Math. J.* **35**, 276—279 (1932).

Let the points of intersection of a space algebraic curve of order n and of the face π_i of a trihedral $\pi_1\pi_2\pi_3$ be denoted by P_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, n$) and let $(P_{ij}[\pi_i\pi_{i+1}])$ denote the distance from P_{ij} to the line of intersection of π_i and π_{i+1} . Then $\prod_i \prod_j (P_{ij}[\pi_i\pi_{i+1}]) = (-1)^n \prod_i \prod_j (P_{ij}[\pi_i\pi_{i-1}])$, where $i-1=3$ when $i=1$, $i+1=1$ when $i=3$. This space analogue of Carnot's theorem for plane algebraic curves has been proved by Takasu for rational curves in space. In the present paper this theorem is proved for any space curve which is the complete intersection of two surfaces. The remark that the theorem holds for all algebraic curves in space, since if a curve is given as the partial intersection of two surfaces "the remaining intersection must have been already defined", is not entirely convincing without further proof. However, Takasu has subsequently shown that the general theorem can be reduced to Carnot's theorem in plane by projection from the vertex of the trihedral.

O. Zariski (Baltimore).

Takasu, Tsurusaburo: Einige räumliche kurventheoretische Analoga des Carnotschen Satzes. *Tôhoku Math. J.* **35**, 280—284 (1932).

Beziehung zwischen den Abständen der Punkte, in denen eine rationale, dann auch — auf Grund einer Bemerkung von A. Ichida, vgl. vorst. Referat — allgemeiner: algebraische Raumkurve die Ebenen eines Drei- (allgemeiner: n -) Flaches schneidet, von den Kanten dieses Drei- (n -) Flaches.

E. A. Weiss (Bonn).

Roth, L.: Some surfaces containing triple curves. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **28**, 300—310 (1932).

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Charaktere der Doppelfläche und der dreifachen Linie einer algebraischen Hyperfläche in einem vierdimensionalen Raume, insbesondere im Falle, wo jene Doppelfläche rational ist, betrachtet der Verf. die Doppelfläche einer algebraischen V_3 , die entweder aus ∞^1 Ebenen oder aus ∞^2 Geraden besteht. Es werden so Ordnung, Rang, Klasse, Anzahl der effektiven und der scheinbaren Kuspidualpunkte usw. vieler besonderer Flächen ausgerechnet; alle besitzen eine dreifache Linie. Die Arbeit ist auf andere frühere oder gleichzeitige Arbeiten desselben Verf. sehr eng gestützt (s. z. B. dies. Zbl. **3**, 70) und kann ohne die Kenntnis dieser anderen Untersuchungen nicht gelesen werden.

E. G. Togliatti (Genova).

Burniat, Pol: Sur une représentation du domaine d'une droite multiple sur une surface algébrique. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **1**, 131—133 (1932).

A quadratic transformation T of the second kind between two spaces S' and S transforms the neighborhood of a definite straight line a' in S' into a quadric surface Q in S . An algebraic surface F' of order n passing p times through a' is transformed by T into a surface F'' of order $3n - 2p$, which meets the quadric Q along a curve Δ of order n . This curve can be used in order to represent the points of F' infinitely near to a' . The main feature of this representation consists in the fact that of the two generators of Q passing through a point of Δ one represents a point of a' and the other represents one of the p tangent planes of F' at that point. If Δ degenerates, each component represents an irreducible branch of F' along a' and the intersections of two components give the contacts of the two corresponding branches of F' . If one component is a generator of Q then F' either possesses a $p+1$ -fold point on a' or has along a' a fixed tangent plane. As an application the following theorem is proved: Given two surfaces F'_1 and F'_2 of order n_1 and n_2 respectively and passing through the line a' p_1 and p_2 times respectively. If $p_1 \leq p_2$, $n_1 - p_1 \geq n_2 - p_2$, and if the two surfaces possess p_1 common tangent planes at a generic point of a' and $n_2 - p_2$ common

points of contact with a generic plane on a' , then F'_1 has $n_1 - p_1 - n_2 + p_2$ $p+1$ -fold points on a' and F'_2 has along a' $p_2 - p_1$ fixed tangent planes. Zariski (Baltimore).

Todd, J. A.: Polytopes associated with the general cubic surface. J. London Math. Soc. **7**, 200—205 (1932).

Um die Inzidenzbeziehungen zwischen den 27 Geraden einer F^3 übersichtlich darzustellen, hat P. H. Schoute die Konfiguration auf die 27 Ecken eines regelmäßigen Polytops im R_6 oder auf die Geraden — Durchmesser — abgebildet, welche diese Ecken mit dem Mittelpunkt des Polytops verbinden. Jeder Doppelsechs und ihrer Schurschen F^2 läßt sich nun ebenfalls ein Durchmesser zuordnen, und zwar so, daß der Durchmesser komplanar wird mit jedem Durchmesserpaar, das ein dem gleichen Sechstupel dieser Doppelsechs angehöriges Geradenpaar darstellt. Schneidet man dann die Figur der $27 + 36$ Geraden mit einem R_5 , so erhält man das von T. G. Room (vgl. dies. Zbl. **4**, 223) auf andere Weise abgeleitete Bild der 27 Geraden und ihrer Schurschen F^2 . Andererseits können die 36 den Schurschen F^2 entsprechenden Durchmesser als Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines zweiten regulären Polytops angesehen werden, und in dieser neuen Abbildung erscheinen gewisse invariante Beziehungen zwischen den Schurschen F^2 (z. B. die Systeme von Morton und Meyler) in besonders übersichtlicher Gestalt. (Einfache Koordinatenwerte für die Eckpunkte der beiden Polytope.)

E. A. Weiss (Bonn).

Welchman, W. G.: Plane congruences of the second order in space of four dimensions and fifth incidence theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 275—284 (1932).

Die Ebenen eines vierdimensionalen Raumes, die eine gegebene algebraische Linie L viermal schneiden, bilden eine Ebenenkongruenz (System von ∞^2 Ebenen); auf jeder Ebene des Systems hat man als Brennpunkte 2. Ordnung die vier Punkte von L und noch einen weiteren Punkt, so daß alle Ebenen der Kongruenz noch eine weitere Linie L' je einmal schneiden. Im Falle einer Ebenenkongruenz 2. Ordnung, kann man die Ordnung von L' folgendermaßen bestimmen: Man bestimme zunächst den „Grad“ der singulären Linie L der Kongruenz; man schneide dann die Ebenenkongruenz mit einem S_3 , σ ; man erhält so eine Strahlenkongruenz 2. Ordnung, die die Schnittpunkte von σ mit L und L' als singuläre Punkte besitzt; ein Vergleich mit der bekannten Klassifikation der Strahlenkongruenzen 2. Ordnung eines S_3 ergibt die gesuchte Ordnung. — Der Verf. betrachtet den Fall, wo L aus zwei rationalen normalen Kurven 4. Ordnung Γ_1 und Γ_2 mit sechs gemeinsamen Punkten $c_1 \dots c_6$ besteht; die Ebenen, die Γ_1 dreimal und Γ_2 nur einmal schneiden, schneiden noch eine dritte ähnliche Kurve Γ_3 , die durch $c_1 \dots c_6$ hindurchgeht. — Ist L eine elliptische Kurve 6. Ordnung Γ zusammen mit einer ihrer beiden Trisekanten l_1 und l_2 , so schneiden die Ebenen, die mit Γ drei Punkte und mit l_1 einen Punkt gemein haben, noch eine weitere rationale normale C^4 , die die sechs Punkte $l_1 \Gamma$, $l_2 \Gamma$ enthält. — Diese zwei Sätze können auch anders gefunden werden: Drei Hyperflächen 2. Ordnung schneiden sich in einer Kurve C^6_ξ mit dem Geschlechte 5, und definieren ein Netz solcher Hyperflächen; die Jakobische Kurve des Netzes ist eine C^{10}_δ ; die Ebenen, die C^6_ξ viermal schneiden, schneiden auch C^{10}_δ je einmal. Läßt man jetzt C^6_ξ in C^6_η mit ihren beiden Trisekanten, oder in zwei C^4_0 mit sechs gemeinsamen Punkten $c_1 \dots c_6$, zerfallen, erhält man wieder die beiden obigen Sätze, und noch folgenden: Die Ebenen, die beide C^4_0 je zweimal schneiden, schneiden noch eine C^6_η , die $c_1 \dots c_6$ enthält. — Über die große Menge der besonderen Fälle, die diskutiert werden, ist es nicht möglich, hier einzeln zu referieren.

E. G. Togliatti (Genova).

Edge, W. L.: The number of apparent double points of certain loci. Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 285—299 (1932).

In einem Raume S_{2n+1} betrachtet man zwei windschiefe S_n ; wenn sie aufeinander projektiv bezogen werden, so erfüllen die ∞^n Verbindungsgeraden der Paare ihrer entsprechenden Punkte eine wohlbekannte V^{n+1}_{n+1} ; die zwei S_n gehören einer ∞^1 Schar von S_n an, die die V^{n+1}_{n+1} ganz überdecken. Der Durchschnitt der V^{n+1}_{n+1} mit einer Hyper-

fläche 2. Ordnung Q , die einen S_n der V_{n+1}^{n+1} enthält, ist (von jenem S_n abgesehen) eine V_n^{2n+1} (die von D. W. Babbage schon betrachtet worden ist; s. dies. Zbl. 2, 148), die einen einzigen scheinbaren Doppelpunkt besitzt. Enthält Q zwei S_n der V_{n+1}^{n+1} , so ist ihr weiterer Durchschnitt mit V_{n+1}^{n+1} eine V_n^{2n} mit ebenfalls einem einzigen scheinbaren Doppelpunkt, und die aus ∞^{n-1} Geraden der V_{n+1}^{n+1} besteht. Die V_n^{2n+1} und V_n^{2n} sind beide rational, und Verf. gibt einige Verfahren zur Auffindung ihrer eindeutigen Abbildung auf eine S_n . Allgemeiner kann man Q durch eine Hyperfläche Φ der Ordnung N ersetzen, die s Räume S_n der V_{n+1}^{n+1} enthält ($0 \leq s \leq N$); der weitere Durchschnitt von Φ und V_{n+1}^{n+1} ist eine $V_n^{(n+1)N-s}$ mit

$$N^2 - (s+1)N + \frac{1}{2}s(s+1)$$

scheinbaren Doppelpunkten. Insbesondere betrachtet Verf. die Flächen F^6, F^7, F^8, F^9 , die man erhält, wenn $n = 2, N = 3, s = 3, 2, 1, 0$. Für diese F^8, F^9 sowie auch für die Fläche F^{2n+1} , die man erhält, wenn $n = 2$ und $s = N - 1$, rechnet er die Zeuthen-Segrésche Invariante und die wichtigsten Charaktere aus. *E. G. Togliatti* (Genova).

Welchman, W. G.: Foci of systems of spaces. J. London Math. Soc. 7, 175—179 (1932).

Als Fortsetzung wohlbekannter Untersuchungen von C. Segre über ∞^r -Systeme von S_k eines S_n und über die Fokalpunkte eines S_k des Systems (Schnittpunkte eines S_k des Systems mit einem unendlich benachbarten), betrachtet Verf. ein ∞^{n-k} -System von S_k . Auf jedem S_k des Systems bilden die Fokalpunkte 2. Ordnung, d. h. die Schnittpunkte des betrachteten S_k mit zwei ihm unendlich benachbarten, eine V_{k-2} der Ordnung $\frac{1}{2}(n-k)(3n-3k-1)$. Für ein ∞^2 -System von S_k werden auch die Fokalpunkte 3. Ordnung studiert: auf jedem S_k bilden sie eine V_{k-3}^{11} ; insbesondere, für ein ∞^2 -System von S_3 eines 5-dimensionalen Raumes, enthält jedes S_3 des Systems auf der Fokal- C_1^5 2. Ordnung (C. Segre) 14 Fokalpunkte 3. Ordnung. Einfache analytische Beweise, denjenigen von C. Segre ähnlich. *E. G. Togliatti* (Genova).

Differentialgeometrie:

Krebs, H.: Sur les surfaces qui ont un élément linéaire de Liouville. Bull. Sci. math., II. s. 56, 182—188 (1932).

Es werden diejenigen Orthogonalnetze $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ betrachtet, die sich als Netz der Krümmungslinien einer Fläche des euklidischen Raumes auffassen lassen („virtuelle Krümmungslinien“). Dieses Problem kommt darauf hinaus, eine zweite Fundamentalform hinzuzubestimmen, die den Gauß-Codazzischen Gleichungen genügt; das ist nur möglich, wenn die E, G eine Integrabilitätsbedingung erfüllen. Im allgemeinen ist das eine partielle Differentialgleichung 5. Ordnung, und die gesuchte Fläche ist der Gestalt nach eindeutig bestimmt für jedes Lösungssystem E, G dieser Gleichung. Verf. beschränkt sich (ohne dies auszusprechen) auf den bei der analytischen Durchrechnung von selbst sich darbietenden Sonderfall, daß statt jener Gleichung mehrere Relationen höchstens 4. Ordnung in E, G erfüllt sind und zu jedem solchen System E, G eine einparametrische Schar gestaltlich verschiedener Flächen gehört. Durch einige geschickte Separationen und Benutzung der explizit bekannten allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $u_{xy} = e^u$ gelingt es Verf., die sämtlichen Orthogonalnetze dieser Art anzugeben (von einfachen Spezialfällen abgesehen). Man erhält bei geeigneter Normierung der Variablen entweder

$$ds^2 = (u - v) \left[\frac{du^2}{cu^2 + c_1 u + c_2} + \frac{dv^2}{-cv^2 + c_3 v + c_4} \right]$$

(Liouvillesche Form) oder $d\sigma^2 = ds^2/(u - v)^2$, wo ds^2 die angegebene Gestalt hat. — Mehrere Druckfehler in den Formeln. Vielleicht ist es auch ein Druckfehler, daß S. 184 u. und S. 185 u. zwei nach Ansicht des Ref. voneinander unabhängige Integrationskonstanten mit demselben Buchstaben c bezeichnet sind. *Cohn-Vossen*.

Chini, Mineo: *Sulle superficie spirali.* Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 379 bis 390 (1932).

Übersicht über die Hauptformeln über Spiralfächen und Neuableitung einiger einfacher Sätze über die wichtigsten auf diesen Flächen verlaufenden Kurven: die zu einer erzeugenden Kurve homothetischen Kurven, die Spiralbahnen eines erzeugenden Punktes, die zugehörigen Orthogonaltrajektorien, die Krümmungs- und Asymptotenlinien und die geodätischen Linien.

Cohn-Vossen (Köln).

Arrighi, G.: *Introduzione alla geometria differenziale della superficie dei centri di carena.* Atti Accad. Sci. Torino 67, 194—202 (1932).

Nakajima, Sôji: *Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben.* IV. Tôhoku Math. J. 35, 329—344 (1932).

Untersuchungen über Flächenpaare, bei denen die Kongruenz der gemeinsamen Tangenten eine Normalenkongruenz ist. Fortsetzung der Arbeiten gleichen Titels in derselben Zeitschrift 30, 142—146 (1928) und 33, 153—156, 157—160 (1930).

W. Fenchel (Göttingen).

Lane, Ernest P.: *Surfaces and curvilinear congruences.* Trans. Amer. Math. Soc. 34, 676—688 (1932).

Le mémoire référé contient la première investigation dans la théorie des congruences curvilignes en géométrie projective-différentielle. En rapportant la surface initiale (x) de la congruence aux asymptotiques u, v (les formules de M. Fubini) l'auteur détermine la ligne génératrice L de la congruence en coordonnées locales par rapport au tétraèdre (x, x_u, x_v, x_{uv}). Après une brève indication des formules générales il examine les congruences des lignes planes situées dans les plans tangents de la surface (x); plus particulièrement la congruence des coniques assujeties aux conditions de plus en plus restrictives: 1° elles touchent les tangentes asymptotiques; 2° les six foyers sont deux à deux alignés au point (x); 3° ces trois droites coïncident avec les trois tangentes des Segre et 4° la conique en question est une enveloppe des droites qui joignent les points transformés de Laplace liés aux réseaux d'un faisceau (the ray-conic of the pencil). Les deux dernières conditions ramènent aux surfaces particulières intéressantes.

S. Finikoff (Moskau).

Blaschke, W., and R. C. Bose: *Quadrilateral 4-webs of curves in a plane.* Indian Phys.-Math. J. 3, 99—101 (1932).

Gegeben sind vier Kurvenscharen

$$u_i(x, y) = \text{const}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

in der Ebene (x, y beliebige Punktkoordinaten), die die Bedingung $\sum_{i=0}^3 u_i(x, y) = 0$ identisch erfüllen. Jede Kurve, die zwei „Gegenecken“ eines aus den 0, 1, 2, 3-Kurven gebildeten Vierseits verbindet, nennt man eine Diagonale. Es gilt nun folgender Satz: Die obige Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn man zwei neue Kurvenscharen I und II finden kann, so daß jedes Vierseit, das eine I-Diagonale hat, auch eine II-Diagonale besitzt. In diesem Falle existiert noch eine dritte Schar III, so daß also jedes Vierseit mit einer Diagonale zugleich zwei weitere Diagonalen besitzt. — Der Nachweis, daß die Figur aus der Bedingung folgt, gelingt mit Methoden, die bereits früher von W. Blaschke aufgefunden sind. (Vgl. z. B. T_{35} .) Die Umkehrung zeigt man, indem man das der Bedingung genügende ebene 4-Gewebe zu einem räumlichen „Achtflächgewebe“ ergänzt. Dabei gehen die 4 Flächenscharen des Achtflächgewebes durch 0, 1, 2, 3 und die drei von den Schnittkurvenscharen der Flächenscharen aufgespannten Flächenscharen durch I, II, III hindurch. Ein Achtflächgewebe ist durch die Gleichung $\sum_0^3 u_i(x, y, z) = 0$ gekennzeichnet. Ist etwa $z = 0$ unsere Ausgangsfläche, so folgt die Bedingung.

G. Howe (Hamburg).

Ganapati, P.: Theorems on ovals. Annamalai Univ. J. **1**, 67—71 (1932).

Besitzt eine Eilinie genau 4 Scheitel, so liegen diese Scheitel nie auf einem Kreis. — Außerdem drei einfache z. T. geläufige Bemerkungen über Eilinien, Eilinien mit Mittelpunkt und Eilinien konstanter Breite. W. Fenchel (Göttingen).

Bieberbach, Ludwig: Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. Comment. math. helv. **4**, 248—255 (1932).

Die Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$ besitzt als konformes Modell der hyperbolischen Ebene bekanntlich das Bogenelement $ds^2 = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} (dx^2 + dy^2)$. Hierfür kann man auch die konvergente Reihenentwicklung

$$ds^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n(x^2 + y^2)^{n-1} (dx^2 + dy^2)$$

schreiben. Nun erweist sich jedes Reihenglied als Differentialform der Krümmung Null, und zwar wird

$$n(x^2 + y^2)^{n-1} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{n} (dx_{2n-1}^2 + dy_{2n}^2) \text{ für } x_{2n-1} + iy_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} (x + iy)^n \quad (n \geq 1).$$

Da $\sum_1^{\infty} x_n^2$ konvergiert, bilden die x_k einen Hilbertschen Raum, in den die hyperbolische Ebene durch die angegebenen Formeln eingebettet ist. Man erkennt leicht, daß die Einbettung frei von Singularitäten und Selbstdurchdringungen ist. Durch elegante Rechnung ergibt sich ferner, daß jede längentreue Abbildung der hyperbolischen Ebene in sich durch eine Bewegung oder Spiegelung des Hilbertschen Raumes verwirklicht wird, bei der jenes Modell in sich übergeht. Wir haben also eine einstufig isomorphe Darstellung der ebenen hyperbolischen Gruppe durch eine Bewegungsgruppe des Hilbertschen Raumes. — Demgegenüber wird (mit kurzer Andeutung des Beweisgedankens) erwähnt, daß es in einem euklidischen Raum von endlich vielen Dimensionen keine nichttriviale Darstellung der hyperbolischen ebenen Gruppe durch eine euklidische Bewegungsgruppe gibt. Zum Schluß wird ein Beweis von Erhard Schmidt wiedergegeben dafür, daß es im endlichdimensionalen euklidischen Raum keine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Gaußscher Krümmung gibt, die eine eingliedrige Gruppe euklidischer Bewegungen in sich gestattet. — Ob es überhaupt solche singularitätenfreie Flächen in einem endlichdimensionalen euklidischen Raum gibt, weiß man noch nicht. Cohn-Vossen (Köln).

Rinow, W.: Über Flächen mit Verschiebungselementen. Math. Ann. **107**, 95 bis 112 (1932).

Für die im folgenden benutzten Begriffsbildungen vgl. die in dies. Zbl. **2**, 350 und **4**, 367 besprochenen Arbeiten von Hopf und Rinow bzw. Rinow. — Ein differentialgeometrisches Element wird Verschiebungselement genannt, wenn es durch seinen Trägerpunkt P einen analytischen Kurvenbogen gibt, so daß sich eine Umgebung von P längentreu auf eine Umgebung eines jeden Punktes des Kurvenbogens abbilden läßt. Die Arbeit behandelt die Frage: Was läßt sich über eine vollständige differentialgeometrische Fläche nichtkonstanter Krümmung aussagen, die ein Verschiebungselement enthält. Es wird gezeigt, daß eine solche Fläche einer euklidischen oder elliptischen Raumform (Ebene, Zylinder, Möbiussches Band, Torus, Kleinscher Schlauch, Kugel, projektive Ebene) homöomorph ist. Ferner gestattet eine solche Fläche, wenn sie nicht dem Möbiusschen Band oder dem Kleinschen Schlauch homöomorph ist, stets eine einparametrische Schar von längentreuen Abbildungen auf sich, die entweder alle bis auf die Identität fixpunktfrei sind (Verschiebungsfläche) oder alle den gleichen Fixpunkt besitzen (Drehfläche). In den beiden Ausnahmefällen braucht keine Schar von Isometrien zu existieren. W. Fenchel (Göttingen).

Hopf, H., und W. Rinow: Die topologischen Gestalten differentialgeometrisch verwandter Flächen. Math. Ann. **107**, 113—123 (1932).

Zwei vollständige differentialgeometrische Flächen (vgl. die im vorst. Ref. genannten Referate) werden als verwandt bezeichnet, wenn sie eineindeutig und längentreu aufeinander abbildbare Teilgebiete enthalten. Es wird gezeigt: Zwei verwandte Flächen sind entweder zwei elliptischen oder zwei euklidischen oder zwei hyperbolischen Raumformen homöomorph. Zu zwei topologischen Flächentypen gibt es also dann und nur dann verwandte Flächen, wenn es nichteuklidische Raumformen gleicher Krümmung von diesen Typen gibt. Beim Beweis kommt der im vorst. Referat genannte Satz zur Anwendung, daß eine vollständige Fläche nichtkonstanter Krümmung mit Verschiebungselement einer euklidischen oder elliptischen Raumform homöomorph ist. — Der Verwandtschaftsbegriff ist auf Grund des „Eindeutigkeitssatzes“ von Rinow (dies. Zbl. **4**, 367) transitiv. W. Fenchel (Göttingen).

Sincov, D.: Propriétés du système des courbes intégrales de l'équation de Pfaff à n variables. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr **10**, 1275—1294 (1931) [Russisch].

Erweiterung auf n Veränderliche der früheren Untersuchungen des Verf. (z. B. Math. Ann. **101**, 261—272) über gewisse Analogien zwischen Integralkurven einer Pfaffschen Gleichung und Kurven auf einer Fläche. Es werden im R_n die M_1 betrachtet, die der Gleichung $P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n = 0$ genügen, d. h. die in jedem Punkte die Hyperebene $(E_{n-1}) \sum P_i (X_i - x_i) = 0$ berühren. Die Richtungen der Kurven, die mit E_{n-1} eine Berührung 2. Ordnung haben (Haupttangentialrichtungen), bilden in jedem Punkte einen $n-2$ -dimensionalen Kegel zweiter Ordnung. Dann wird die Krümmung in jeder Richtung von E_{n-1} definiert als Grenzwert $2\delta/ds^2$, wobei δ den Abstand von E_{n-1} eines zu (x, y, z) benachbarten Punktes bedeutet. Die Richtungen, die der Krümmung einen stationären Wert zuteilen, bilden ein System von $n-1$ zueinander orthogonalen Geraden (Haupttrichtungen). Es existiert ein Analogon zum Eulerschen Satz. Ferner werden zwei Arten von Krümmungslinien — die Umhüllenden der Haupttrichtungen und die Kurven, längs deren die Normalen zu E_{n-1} sich schneiden, und zwei Arten von geodätischen Linien — die kürzesten und die geradesten definiert. W. Stepanoff (Moskau).

Cramlet, Clyde M.: A complete system of tensors of linear homogeneous second-order differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 626—644 (1932).

Le but du mémoire est d'introduire le calcul différentiel absolu dans la géométrie projective-différentielle. L'auteur se borne à la théorie des courbes et développe un système tensoriel lié aux transformations des variables qui ne changent pas la forme d'un système de n équations différentielles du second ordre linéaires homogènes à n variables dépendantes et une variable indépendante. En éliminant les dérivées des coefficients de la transformation à l'aide de certaines expressions formées des coefficients des équations fondamentales et de leurs dérivées il arrive à la notion du tenseur, de la dérivation tensorielle, des coordonnées normales. Il établit le système complet des invariants et la théorie d'équivalence de deux systèmes d'équations du type considéré. En l'appliquant à la géométrie il introduit le tenseur fondamental, la métrique liés aux courbes intégrales du système d'équations donné. S. Finikoff (Moskau).

Mechanik.

● **Suter †, Ernst:** Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis, insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken. 2., verb. u. erw. Aufl. Bearb. v. O. Baumann u. F. Häusler. Berlin: Julius Springer 1932. XIV, 761 S. u. 656 Fig. geb. RM. 69.—.

Den Gegenstand dieses in jeder Hinsicht auf die Bedürfnisse der technischen Praxis zugeschnittenen Buches bildet die Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen unter systematischer Benutzung der beiden Festpunkte eines elastisch

eingespannten Stabes, d. h. der von der äußeren Belastung unabhängigen Momenten-nullpunkte für den Fall, daß in den im übrigen unbelasteten Stab an einem seiner beiden unverschiebbar festgehaltenen Enden ein Moment eingeleitet wird. Die Methode wird im ersten, von O. Baumann bearbeiteten Teil eingehend erläutert, und zwar getrennt für Tragwerke mit unverschiebbaren Knotenpunkten und nur geraden oder auch gebogenen Stäben sowie für Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten, wobei der letztere Fall durch Anbringung gedachter Lager zunächst auf den ersten Fall zurückgeführt und alsdann der Einfluß der tatsächlich auftretenden Knotenpunktverschiebungen berücksichtigt wird. Im zweiten, von F. Häusler bearbeiteten Teil werden als Anwendungsbeispiele zahlreiche praktisch ausgeführte bzw. projektierte Konstruktionen in bezug auf die bei verschiedenen Belastungsfällen hervorgerufenen Momente, Normal- und Querkkräfte vollständig durchgerechnet.

Harry Schmidt (Köthen).

Tea, Peter L.: Elementary theory of the gyroscope. J. Franklin Inst. **214**, 299 bis 325 (1932).

Tolle, M.: Zur Dynamik der eben bewegten Scheibe. Z. Ver. Deutsch. Ing. **1932 I**, 799—800.

Die Aufgabe, bei gegebenen, eingepprägten Kräften und bei gegebenem Geschwindigkeitszustand einer ebenen, bewegten Scheibe die Beschleunigungen oder die ihnen proportionalen Massenkkräfte und die Reaktionen zu finden, wird gelöst durch Trennung der Beschleunigungskomponenten, die allein von der Winkelgeschwindigkeit herrühren, von den durch die unbekannte Winkelbeschleunigung hervorgerufenen Tangentialbeschleunigungen. — Beschleunigungspol, Wendepol, Geschwindigkeitspol sind entbehrlich bei dem angegebenen Verfahren, außerdem brauchen nur Parallele und Senkrechte gezogen zu werden.

W. Meyer zur Capellen (Aachen).

Mattioli, Giandomenico: Principi variazionali e trasformazioni adiabatiche. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **10**, 283—328 (1932).

Die Levi-Civitasche Theorie der adiabatischen Invarianten kanonischer Systeme wird unter Zugrundelegung eines den adiabatischen Charakter der Störungen in Rechnung setzenden Variationsprinzips, das einen unmittelbaren Anschluß an die Hamilton-Jacobische Theorie gestattet, von neuem und allgemein begründet und in manchen Punkten weiter ausgebaut. Insbesondere werden die grundlegenden asymptotischen Verteilungsfragen der Levi-Civitaschen Theorie eingehend behandelt. Der allgemeine Ansatz wird an Hand der stationären Bewegungsformen von Routh illustriert. Vor allem wird aber eine ins Einzelne gehende Diskussion der Stäckelschen Separationssysteme gegeben, wobei die Raumdichten und Zeitmittel explizite berechnet werden.

Wintner (Baltimore).

Frenkel, J.: Über die Grundlagen der Theorie des statistischen Gleichgewichtes und der irreversiblen Vorgänge. Physik. Z. Sowjetunion **1**, 485—497 (1932).

Verf. glaubt, die Ergodenhypothese der statistischen Mechanik dadurch widerlegen zu können, daß er zeigt, daß für ein bedingt-periodisches System der statistische Mittelwert nicht mit dem zeitlichen Mittelwert übereinstimmt. Der Schluß beruht auf der vom Verf. als richtig angesehenen Annahme, daß ein System, dessen Teilchen in einem endlichen Volumen eingeschlossen sind, im allgemeinen eine bedingt-periodische Bewegung ausführen soll. Um die Ergodenhypothese aufrechtzuerhalten, hat man nach Meinung des Verf. das System als nicht vollkommen isoliert zu betrachten und für die Änderung der Integrationskonstanten J_1, J_2, \dots, J_s eine besondere „Unordnungshypothese“ einzuführen. Die besondere Rolle der Energie (Auftreten in der statistischen Verteilungsfunktion) hängt nach Verf. mit deren Additivität zusammen. Zum Schluß geht Verf. zur Quantentheorie über und betrachtet die Forderung der Inkohärenz der Amplituden c_n der Wellenfunktion $\psi = \sum_n c_n \psi_n(q)$ als Analogon zur obigen „Unordnungshypothese“.

V. Fock (Leningrad).

Aero- und Hydromechanik:

Hohenemser, K., und W. Prager: Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. *Z. angew. Math. Mech.* **12**, 216—226 (1932).

Die Verff. haben das Ziel, die bisher vorgeschlagenen Erweiterungen der klassischen Kontinuumsmechanik in einer Systematik zusammenzufassen und zu ergänzen. Diese Systematik der einfachsten „Idealstoffe“ beruht auf folgenden Voraussetzungen: Die Stoffe sind isotrop oder quasiisotrop (der Zusatz „quasi“ bezieht sich immer auf Mittelwertsbildungen in einem endlichen kleinen Volumelement), die Bewegung ist geordnet (d. h. stetig und differenzierbar) oder quasigeordnet, durch den Drehungsanteil des Verschiebungsfeldes bzw. des Feldes der Verschiebungsgeschwindigkeiten werden keine inneren Spannungen geweckt, die Volumänderung hängt allein von dem allseitigen Druck ab, und zwar in linearer Weise (diese Voraussetzung wird bei technischen Stoffen, nicht aber z. B. bei geologischen Prozessen anwendbar sein; d. Ref.). Die Beziehung zwischen dem volumtreuen Anteil der Deformation und dem deviatorischen Anteil der Spannungen ist vom allseitigen Druck unabhängig. Einer reinen Schiebung entspricht eine reine Schubspannung mit gleicher Achsenrichtung, die dritte Invariante (d. h. Determinante) des Spannungs- oder Deformationsdeviators ist einflußlos. — Aus diesen Voraussetzungen werden 8 Typen von Idealstoffen abgeleitet und diskutiert als Spezialfälle einer allgemeinen vierkonstantigen Gleichung, und alle bisher behandelten Stoffe werden als hierunter enthalten nachgewiesen. *Noether*.

Rosenblatt, A.: Sur la stabilité du mouvement général laminaire des fluides visqueux incompressibles. *C. R. Acad. Sci., Paris* **194**, 2284—2286 (1932).

A study of the motion of an incompressible viscous liquid between a stationary wall $y = 0$ and a wall $y = H$ which moves with velocity U . Conditions are found under which the perturbations of the quadratic laminar motion $Hu = Uy - KH y (H - y)$ may be determined from an absolutely and uniformly convergent series of terms each of which is the product of a function of y , an exponential function of a multiple of x and an exponential function of a multiple of t . The method depends on a study of a system of integral equations of Volterra's type. *H. Bateman* (Pasadena).

Rosenblatt, Alfredo: Sulla stabilità dei movimenti di Poiseuille dei liquidi viscosi incompressibili. *Ann. Mat. pura appl., IV. s.* **10**, 255—275 (1932).

The flow being assumed to be symmetrical about the axis of z , a study is made of certain finite perturbations of the laminar motion by expanding the stream-function Ψ of Stokes in a series of powers of a parameter ε

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k e^{-k(\lambda z + \mu t)} f_k(r)$$

where $\Psi_0 = \int W(r) r dr$. If

$$\Phi_k(r) = f_k''(r) - \frac{1}{r} f_k'(r) + k^2 \lambda^2 f_k(r),$$

the partial differential equation for Ψ gives rise to a set of differential equations for the quantities Φ_k which involve W . These equations are solved by means of Bessel functions, special attention being given in the paper to the case of no initial motion when $W = 0$. The quantities λ and μ are then connected by Sexl's equation

$$\Lambda I_0(a\Lambda) I_1(a\lambda) = \lambda I_0(a\lambda) I_1(a\Lambda)$$

in which $\Lambda = (\lambda^2 + \mu/\nu)^{1/2}$. To establish the absolute and uniform convergence of the series representing Ψ for values of ε whose moduli are less than a certain quantity q a study is first made of the convergence of the series

$$\sum \varepsilon^k e^{-k(\lambda z + \mu t)} \Phi_k(r)$$

when λ and μ are not connected by the characteristic relation

$$\sin\left(\frac{\mu a}{2\lambda \nu}\right) = 0. \quad H. Bateman \text{ (Pasadena).}$$

Rosenblatt, Alfred: Sur les mouvements des liquides visqueux symétriques par rapport à un axe. Bull. Soc. Math. Grèce 13, 17—28 (1932).

Die Arbeit ist ein Auszug aus einer größeren Monographie des Verf. über die strengen Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten, die in der Sammlung: „Memorial des Sciences mathématiques“ von Villat erscheinen wird. Sie behandelt hauptsächlich die Spannungen in einer rotationssymmetrischen Strömung, auch bei Wirbelfreiheit. *F. Noether (Breslau).*

Hersey, Mayo D., and George H. S. Snyder: High-pressure capillary flow. Theory of non-uniform viscosity; illustrated by experimental data. J. Rheology 3, 298—317 (1932).

Die Verff. beschäftigen sich mit der Strömung einer zähen Flüssigkeit durch eine Kapillare bei Drucken, die hoch genug sind, um die Zähigkeit merklich zu beeinflussen. Die Resultate werden in Form des Poiseuilleschen Gesetzes mit einem Korrektionsfaktor gegeben. Bei empirisch gegebenem Zusammenhang zwischen Druck und Zähigkeit kann der Korrektionsfaktor durch graphische oder numerische Integration ermittelt werden. Die Rechnungen werden mit den Versuchsergebnissen verschiedener Autoren verglichen. *Prager (Göttingen).*

Roy, Maurice: Définition et lois du ressaut des jets gazeux. C. R. Acad. Sci. Paris 195, 300—302 (1932).

Bei Gasströmungen durch Laval-Düsen, die in einen Raum von konstantem Außendruck münden, richtet sich die Durchflußmenge nach dem engsten Querschnitt der Düsen, der Druck im Austrittsquerschnitt unabhängig vom Außendruck nach der Querschnittserweiterung gegenüber dem engsten Querschnitt. Trotzdem muß der austretende Strahl an seinen Grenzen den Außendruck annehmen. Dies geschieht durch schräge Wellen im Strahl, die in schiefen Verdichtungsstößen allmählich abklingen, wenn man von der Vermischung des Strahles mit der Umgebung absieht. Die ganze Strömung läßt sich daher nur dann eindimensional behandeln, wenn man das mit schrägen Wellen durchsetzte Stück des Strahles überspringt und gleich auf den ausgeglichenen Endzustand übergeht. Roy führt daher den Begriff „ressaut“, also etwa „Sprung“, ein: In diesem Sprung am Ende der Düse erweitert bzw. verengt sich der Strahlquerschnitt gegenüber dem Austrittsquerschnitt unter Druckabnahme bzw. Druckerhöhung und unter Vermehrung der Entropie. Der größte Sprung bei Druckerhöhung ist der „gerade Verdichtungsstoß“ im Austrittsquerschnitt, bei dem der Strahlquerschnitt gleich dem Austrittsquerschnitt ist. In diesem Fall hat die Strömung einen echten Sprung oder Stoß. Die quantitative Behandlung des Sprunges geschieht am einfachsten im Druck-Geschwindigkeits-Diagramm (s. A. Busemann in Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik 4 I, 402). *A. Busemann (Dresden).*

Hutchinson, J. L.: The theory of aircraft performance. The simplification of the physical problems by the introduction of dimensional methods. Aircraft Engrg. 4, 139 bis 142 (1932).

Die Bewegung des stationären Geradeausflugs ist durch zwei unabhängige Veränderliche (Freiheitsgrade) festgelegt: Drosselstellung und Höhenruderausschlag. Dementsprechend sind bei geometrischer Ähnlichkeit der Flugzeuge und Luftschrauben von den fünf dimensionslosen Veränderlichen (Anstellwinkel, Fortschrittsgrad, Auftriebszahl, Bahnneigungswinkel und Bauzahl) nur zwei unabhängige, die übrigen durch drei Ähnlichkeitsbedingungen für Luftkräfte, Fluggewicht und Motorleistung miteinander verknüpft. Es wird eine dimensionslose Auftragung zur vollständigen Darstellung von Flugleistungen vorgeschlagen, die je eine Kurvenschar für Flugzeug und Triebwerk umfaßt, und deren Anwendung auf Änderungen des Fluggewichtes, der Motorleistung und der Luftdichte erörtert. *H. B. Helmbold (Göttingen).*

● **Misztal, Fr.:** Zur Frage der schräg angeblasenen Propeller. — **Troller, Th.:** Aerodynamische Theorie und Entwurf von Luftschrauben. (Abh. a. d. aerodynam. Inst.

an d. techn. Hochsch. Aachen. Hrsg. v. Th. v. Kármán u. C. Wieselsberger. H. 11.) Berlin: Julius Springer 1932. 73 S. u. 46 Abb. RM. 12.—.

Im ersten Teile der Misztalschen Arbeit werden die an einer schräg angeblasenen Luftschraube angreifenden Kräfte und Momente behandelt. Der Untersuchung liegen die Annahmen zugrunde, daß auch bei Schräganblasung die Störungsgeschwindigkeiten im Schraubenkreis die Hälfte ihres Betrages im Unendlichen hinter der Schraube annehmen und daß die Quenumströmung des gegenüber der Fortschrittsrichtung abgelenkten Schraubenstrahls vernachlässigt werden darf. Schub und Drehmoment sind vom Anstellwinkel der Schraubenachse nahezu unabhängig. Daneben tritt eine zur Schraubenachse senkrechte Querkraft in Richtung der Quergeschwindigkeit auf, die vom Fortschrittsgrad wenig abhängig und ungefähr proportional dem Schraubenanstellwinkel ist. Der Vergleich mit gemessenen Querkraften zeigt gute Übereinstimmung. Ebenso wie die Querkraft verhält sich das Seitenmoment um eine zur Querkraft parallele Achse, dessen Drehsinn mit der Quergeschwindigkeit dieselbe Schraubung ergibt wie der Schraubendreh Sinn mit der Axialkomponente der Anblasgeschwindigkeit. Der zweite Teil der Arbeit enthält Versuche über den Einfluß des schrägen Schraubenstrahls auf eine Höhenflosse (ohne dazwischenliegenden Tragflügel). Bei kleinen Schraubenanstellwinkeln verhält sich die Strahlablenkung einigermaßen den vorerwähnten Annahmen entsprechend, bei größeren bleibt sie zurück. Die Kräfte an der Höhenflosse ergeben sich kleiner, als bei Potentialströmung zu erwarten wäre, da der Schraubenstrahl durch die Reibung abgebremst und aufgelöst wird. — Die Trollersche verdienstvolle Monographie umfaßt die Theorie des schwach belasteten, frei fahrenden Schraubenpropellers und die wichtigsten Verfahren des Schraubenentwurfs. Die Fragen des Zusammenwirkens von Luftschraube und Flugzeug werden nur kurz behandelt.

H. B. Helmbold (Göttingen).

Astronomie und Astrophysik.

Arend, Sylvain: *L'anomalie normale et son rôle dans deux applications astronomiques courantes*. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 110—111 (1932).

Die Normalenanomalie, d. i. der Winkel zwischen der Normalen an eine Kepler-Ellipse und deren Apsidenlinie, erweist sich als brauchbar zur bequemen Berechnung der sphärischen geozentrischen Verschiebung eines Planeten (oder Kometen) nach Größe und Richtung.

A. Klose (Berlin).

Banachiewicz, Th.: *Sur la détermination du grand cercle de recherche des astéroïdes*. Astron. Nachr. 244, 187—188 (1932).

Betrachtungen über die zweckmäßige Bestimmung des größten geozentrischen Kreises, in dem die Bewegung eines Planeten momentan erfolgt (sog. Variation). A. Klose.

Walters, M. H. H.: *The variation of eccentricity and semi-axis major for the orbit of a spectroscopic binary*. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 786—805 (1932).

Ein Doppelsternsystem erleide Störungen durch vorübergehende Fixsterne (Passanten). Ausgehend von einer stark exzentrischen Hyperbelbahn als der ungestörten baryzentrischen Bahn des Passanten, werden die Bewegungsgleichungen für die drei Körper aufgestellt und die säkularen Störungen 1. und 2. Ordnung berechnet. Danach wird der statistische Effekt einer großen Zahl zufällig verteilter Begegnungen berechnet, immer unter der Voraussetzung, daß Exzentrizität und Perizentraldistanz des Passanten oberhalb einer bestimmten Grenze bleiben (so wird z. B. nur über diejenigen Passanten summiert, deren Exzentrizität größer als 5 ist). Die Störungen der Achse und der Exzentrizität über große Zeiträume sind proportional der dritten Potenz der Bahnachse des Systems. Die numerischen Werte der Achsenstörungen sind selbst bei einem Zeitraum von 10^{13} Jahren zu klein, als daß sie kosmogonisches Interesse beanspruchen könnten. Die Korrelation zwischen Achsen- und Exzentrizitätsstörungen ist nicht in Übereinstimmung mit der beobachteten Beziehung zwischen Exzentrizität und Trennbarkeit der Komponenten in spektroskopischen Doppelsternsystemen.

A. Klose (Berlin).

Tiercy, Georges: *Quelques remarques sur le problème des comètes*. Comment. math. helv. 4, 195—218 (1932).

Hypothesen: Die Kometen stammen aus einer Entfernung r , die groß ist gegen die planetaren, aber klein gegen die stellaren Entfernungen. In dem „Entstehungs-

gebiet“ sind die Geschwindigkeitsbeträge zwischen Null und einem Maximalwert gleichwahrscheinlich, größere kommen überhaupt nicht vor, es gibt keine bevorzugten Geschwindigkeitsrichtungen. Sichtbar wird ein Komet nur dann, wenn seine Perihelidistanz ϱ von der Größenordnung des Erdbahnradius wird. Unter diesen Annahmen ergibt sich, daß bei den beobachtbaren Kometen die Zahl der elliptischen Bahnen zu der der hyperbolischen sich verhält wie π zu $2\sqrt{\varrho/r}$. Die Exzentrizitäten der hyperbolischen Bahnen liegen alle sehr nahe bei 1. *A. Klose (Berlin).*

Uitterdijk, J.: A method of deriving limits for the excentricity of the orbit and for the longitude of periastron of an eclipsing binary. Bull. Astron. Inst. Netherlands 6, 241—245 (1932).

Wenn man voraussetzt, daß das Bedeckungssystem aus zwei hellen kugelförmigen Komponenten besteht, lassen sich Grenzwerte für die sphärischen Abstände der Scheibenmittelpunkte angeben, Grenzwerte, die für das gegebene System nicht überschritten werden dürfen, wenn die Bedeckungseigenschaft erhalten bleiben soll. Der kleinstmögliche Abstand ist (nämlich bei zentraler Bedeckung) Null, die obere Grenze ergibt sich aus der Bedingung, daß eine Bedeckung gerade noch eintritt. Zu jedem Extremwert läßt sich aus den photometrischen Daten des Systems Exzentrizität und Länge des Periastrons berechnen. Die wirklichen Werte dieser Größen liegen zwischen den berechneten. *A. Klose (Berlin).*

Witt, G.: Zur Berechnung der Koeffizienten der Störungsfunktion. Astron. Nachr. 246, 221—230 (1932).

Für die numerische Berechnung der Koeffizienten b in der Fourier-Entwicklung der Störungsfunktion

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi)^{-1/2} = \frac{1}{2} b^{(0)} + \sum_1^{\infty} b^{(i)} \cos i\varphi$$

werden verschiedene Verfahren in Vorschlag gebracht. 1. Für $b^{(1)}$ wird ein leicht zu berechnender Näherungsausdruck angegeben. Der Übergang zu dem genauen Wert geschieht durch Anbringung eines tabulierten Faktors. 2. Auch Kettenbruchentwicklung eignet sich zur Berechnung von $b^{(1)}$ und von einigen anderen Koeffizienten. 3. Zur Berechnung eines beliebigen Koeffizienten $b^{(i)}$ wird ein von Backlund vorgeschlagenes Verfahren ausgearbeitet und durch Hilfstafeln bequem gemacht. Das Verfahren stützt sich auf eine Formel Tchebychews zur genäherten Darstellung einer Veränderlichen mittels einfacher Brüche. Die Formeln sind sämtlich auf logarithmische Rechnung zugeschnitten. *A. Klose (Berlin).*

Wilkins, A.: Über die mehrfachen Lösungen bei der parabolischen Kometenbahnbestimmung. Astron. Nachr. 246, 253—268 (1932).

Bei der Auflösung der Fundamentalgleichung des parabolischen Bahnbestimmungsproblems

$$K_0 r^6 + K_2 r^4 + K_3 r^3 + K_4 r^2 + K_5 r + K_6 = 0$$

(r = heliozentrische Distanz des mittleren der drei zur Bahnbestimmung benützten Kometenörter, K_0 positiv) ergeben sich 3 wesentliche Werte für r , sobald gleichzeitig K_4 positiv und K_5 negativ ist. Die Bedingungen für das Auftreten mehrdeutiger Lösungen werden für die Wilkenskische Bahnbestimmungsmethode analytisch und numerisch entwickelt. Der Vergleich mit der von Hnatek verwandten Methode (s. dieses Zbl. 2, 212 und 311) zeigt, daß die Mehrdeutigkeitsbereiche merklich von der zur Bahnbestimmung benützten Methode abhängen. *A. Klose (Berlin).*

Öpik, E.: On the physical interpretation of color-excess in early type stars. Circ. Harvard Coll. Observ. Nr 359, 1—17 (1931).

This paper deals with the phenomenon of abnormally yellow early stars, for which the colour temperatures cannot be reconciled with the ionization temperatures for any reasonable assumption concerning the pressures in the atmospheres of these stars. It is well known that this phenomenon cannot be explained by simple Rayleigh scattering of stellar or interstellar origin since no deviations from black body distribution have been observed in the spectra of these abnormal stars. The author of the memoir under review insists that there are two different

cases to be treated separately. Namely — 1) stellar scattering when the emergent portion of the scattered light is added to the radiation of the star and 2) interstellar scattering, when the scattered light is lost to our photometers. In the first case Milne-Schuster formula is to be used (with optical thickness $\sim \lambda^{-4}$) and no appreciable deviation from black body distribution should be observed, even allowing for the reddening of the observed amount. On the other hand in the second case we can escape the above mentioned difficulty by supposing that cosmic scattering is of λ^{-1} type (for particles 1,2—2,5 λ in diameter); the resulting changes in the effective temperatures should be then independent of λ , depending only on the optical thickness of the absorbing matter. The author indicates four different possible explanations of the phenomenon in question: a) absorption by dust clouds in space consisting of particles of various sizes with a special distribution of the diameters, b) Rayleigh's scattering by the atmosphere of the star itself, c) decrease of the photospheric opacity with λ , the height of the photosphere being small in comparison with the radius, d) an opposite change of photospheric opacity with λ , and a very considerable extent of the photosphere. To choose between the hypotheses further observational data are required. *B. P. Gerasimovič.*

Cillié, G.: The hydrogen emission in gaseous nebulae. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 820—831 (1932).

Für Zanstrass Modell des Leuchtprozesses in planetarischen Nebeln werden die relativen Intensitäten der ersten Glieder der Balmer-Serie berechnet. Das theoretische Balmer-Dekrement ist nur wenig gegen die Elektronentemperatur empfindlich. Dagegen variiert das von Plaskett und Beermann beobachtete Intensitätsverhältnis H_{β}/H_{γ} sehr stark von Nebel zu Nebel. Die Deutung dieses Befundes als Temperatureffekt ist fraglich. Photometrische Messungen des Balmer-Grenzkontinuums sind zu direkten Bestimmungen der Temperatur des Elektronengases geeignet. Infolge der praktisch vollständigen Ionisation des Wasserstoffs emittieren die Nebel ein allgemeines Kontinuum, das den Elektronenübergängen zwischen verschiedenen hyperbolischen Bahnen entspricht. Dieses entzieht sich bisher wegen seiner Lichtschwäche dem Nachweis. *R. Wildt (Göttingen).*

Russell, Henry Norris: Note on Milne's theory of stellar structure. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **92**, 831—836 (1932).

Einige Anmerkungen zu der Hypothese von Milne, daß vollkommen gasförmige Konfigurationen mit gleichförmiger Verteilung der Energiequellen Radien von der Größenordnung ein parsec haben müßten; ein solches System wäre völlig oder bei sehr starker zentraler Verdichtung zum mindesten in den äußeren Teilen durchsichtig, also eher ein Nebel als ein Stern. Ferner findet Russell, daß wenigstens bei kleinen Massen auch unter den Milneschen Voraussetzungen ein Radius von der Größenordnung der beobachteten Sternradien möglich ist. *Siedentopf (Jena).*

Stevenson, A. F.: The intensities of certain nebular lines and the mean lives of atoms emitting them. Proc. Roy. Soc. London A **137**, 298—325 (1932).

The author calculates the intensities of nebular lines due to O III and N II on the assumption that the lines can be ascribed to quadrupole radiation, the dipole radiation being absent since the lines in question are "forbidden". The calculations are complete except that double transitions are neglected. The agreement of calculated intensities with nebular observation is good in the case of the $^3P_{2,1,0} - ^1D_2$ lines. The mean excited lives are also calculated. The mean excited life of the atom emitting the nebular lines N₁ and N₂ at 5007 Å and 4959 Å is 26 seconds, while the mean excited life of the atom emitting the red lines 6584 Å and 6548 Å is at least 3 minutes. *Woolley (Cambridge).*

Relativitätstheorie.

Markoff, Andreas: Über die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der „Früher als“-Beziehung. (Opt. Staatsinst., Leningrad.) Physik. Z. Sowjetunion **1**, 387—406 (1932).

Verf. legt seinen Betrachtungen 4 Axiome zugrunde, welche zwischen zwei Raumzeitpunkten x und y die Beziehung „ x früher als y “ (in Zeichen: $x \subset y$) definieren. Axiom I: Ist $x \subset y$, so ist y nicht $\subset x$. Axiom II: Ist $x \subset z$ und $z \subset y$, so ist $x \subset y$. Charakteristisch ist das Axiom III, welches eine Art Zeitatomismus einführt: Eine

Kette $x = z^0 \subset z^1 \subset z^2 \subset \dots \subset z^n = y$ zwischen zwei gegebenen Punkten x und y kann nicht eine beliebig große Gliederanzahl haben. Axiom IV: Für jedes Punktepaar (x, y) gibt es ein den Bedingungen $u \subset x$, $u \subset y$, $x \subset v$, $y \subset v$ genügendes Punktepaar (u, v) . — Auf Grund dieser Axiome wird ein Maß für zeit- und raumartige Entfernungen eingeführt. Ferner wird folgendes bewiesen: Ein Raumzeitpunkt x sei durch 4 Zahlen (x_0, x_1, x_2, x_3) gegeben. Dann genügt die durch die Ungleichungen $x_0 < y_0$; $(y_0 - x_0)^2 - \sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \geq 1$ definierte Beziehung $x \subset y$ allen Axiomen I bis IV. —

Endlich wird gezeigt, daß für genügend große zeit- und raumartige Intervalle die durch die \subset -Beziehung induzierte Metrik beliebig wenig von der gewöhnlichen pseudoeuklidischen Metrik abweicht. Zum Schluß weist der Verf. auf den engen Zusammenhang der Grundgedanken seiner Arbeit mit gewissen quantentheoretischen Ideen [Ambarzumian und Iwanenko, Z. Physik **64**, 563 (1930)] hin, welche eine Art Atomismus der Raumzeitwelt voraussetzen. V. Fock (Leningrad).

Djatčenko, Vadim: Le problème planétaire dans la théorie spéciale de relativité. III. Acad. Sci. Ukraine, Bull. Nr 1, 102—105 (1931) [Ukrainisch].

(II. vgl. dies. Zbl. 3, 180).

Juvet, G.: Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la gravitation. Comment. math. helv. 4, 102—105 (1932).

Konsequente Weiterführung des zweiten Teiles einer früheren Arbeit des Verf. [Comment. math. helv. 3, 151—172 (1931); dies. Zbl. 2, 92]. Heckmann (Göttingen).

Vrkljan, V. S.: Über die Verkürzung infolge der Gravitation. Rad jugoslav. Akad. Znan. i Umjetn. 244, 16—19 (1932) [Serbokroatisch].

Das zu erwartende Ergebnis, daß die relativistische Stabverkürzung durch den Michelson-Morleyschen Versuch nicht nachweisbar ist, wird durch eine einfache Rechnung bestätigt. Willy Feller (Kiel).

Vrkljan, V. S.: Eine Interpretationsmöglichkeit für die größere Ablenkung des Lichtes im Schwerfeld der Sonne. Rad jugoslav. Akad. Znan. i Umjetn. 244, 126 bis 128 (1932) [Serbokroatisch].

Ohne weitere Diskussion wird auf die Möglichkeit hingewiesen, den Sonnendurchmesser nicht euklidisch zu berechnen, wodurch man zu kleineren Werten gelangen kann. Damit die gemessene Lichtablenkung $(2,16'' \pm 0,14''$ nach Hopmann) mit der Einsteinschen Gleichung im Einklang steht, müßte der Sonnenhalbmesser $(5,5 \pm 0,3) \cdot 10^{10}$ cm betragen (der gebräuchliche Wert beträgt $6,956 \cdot 10^{10}$ cm).

Willy Feller (Kiel).

Pycha, Z.: Sulla relatività nel microcosmo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 820—827 (1932).

Aufbauend auf einen von B. Finzi entwickelten absoluten Differentialkalkül soll dem quantenhaften Charakter des Mikrokosmos dadurch Rechnung getragen werden, daß die Koordinaten, deren Differentiale und die g_{ik} des Riemannschen Linienelements sämtlich Matrizen repräsentieren sollen an Stelle von gewöhnlichen Zahlen. Einige allgemeine Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit werden erörtert.

Lanczos (Lafayette).

Straneo, Paolo: Nuova teoria unitaria della fisica macroscopica a geometrizzazione assoluta. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 148—154 (1932).

Schouten, J. A., und D. van Dantzig: Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 642 bis 655 (1932).

Die Welt soll eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit projektiver Übertragung bilden. Es werden fünf physikalische Forderungen aufgestellt: 1. Die Weltlinien geladener Massenteilchen sind geodätische Linien. 2. Im reinen Gravitationsfeld gilt die gewöhnliche Relativitätstheorie. 3. Die einfachste ψ -Gleichung ist identisch mit der Diracschen Gleichung. 4. Der totale Impulsenergiepunkt ist längs einer Weltlinie

kovariant konstant. 5. Variation der einfachsten Invarianten ergibt die kombinierten Feldgleichungen von Gravitation und Elektromagnetismus. Diese Forderungen genügen, um einen ganz bestimmten projektiven Zusammenhang auszuzeichnen, der sich sowohl von der projektiv gedeuteten Einstein-Mayerschen Theorie als von der Veblen-Hoffmannschen Theorie unterscheidet. *Lanczos* (Lafayette).

Heckmann, O.: Die Ausdehnung der Welt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Nr 23, 97—106 (1932).

In der in dies. Zbl. 3, 32 ref. Arbeit hat der Verf. unter der Annahme einer im Koordinatensystem ruhenden, isotropen und inkohärenten Materie für den nur von der Zeit abhängigen Koeffizienten R des Bogenelementes $ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2$ eine Differentialgleichung abgeleitet (die letzte der oben angeführten Besprechung), die sich durch Transformation auf

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \varepsilon z^2 + C + \frac{1}{z^2} M(z); \quad M(z) = b + a \sqrt{z^2 + \alpha_1^2} \quad a > 0, b > 0$$

bringen läßt, wobei z, τ, a, b, α_1 proportional den Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung R, t, A, B und α sind und $M(z)$ den Einfluß der Materie darstellt. $\varepsilon = +1, 0, -1$ entspricht λ (kosmologische Konstante) $> 0, 0, < 0$. Da auch $C = +1$ (hyperbolische), 0 (euklidische) und -1 (sphärische Geometrie) sein kann, ergeben sich 9 mögliche Fälle, die ausführlich diskutiert werden. Die Fälle $\varepsilon = +1$ entsprechen der Theorie von Weyl-Eddington, $\varepsilon = 0$ der ursprünglichen Theorie ohne kosmologisches Glied, die von Einstein nunmehr wieder aufgenommen wurde. Nur bei der allerdings willkürlichen Beschränkung auf diesen Fall kann aus der Beobachtung ein Schluß auf die Weltmetrik gezogen werden, und zwar ließe der derzeitige Stand auf eine hyperbolische Metrik schließen. Der Verf. kommt daher wieder zu dem Schluß, daß die Wahl einer bestimmten Raumtype nur aus Gründen des philosophischen Geschmacks erfolgen kann. Will man die Möglichkeit von $R = 0$ ausschließen, so muß man $\varepsilon = +1$ und $C = -1$, will man jedoch die Materiefreiheit des Raumes ausschließen, $\varepsilon = 0$ und $C = -1$ oder $\varepsilon = -1$ und $C = 0$ oder $C = -1$ wählen, die letzten drei Fälle geben dann quasiperiodische Welten. *Zerner* (Wien).

Sen, N. R.: On radiation in an expanding universe. Indian Phys.-Math. J. 3, 89—95 (1932).

Um die Differentialgleichung für den Krümmungsradius des Raumes in der Theorie der sich ausdehnenden Welt eindeutig lösbar zu machen, ist es notwendig, eine die Energiedichte ρ und den Druck p der raumerfüllenden Substanz (Materie und Strahlung) verknüpfende Zustandsgleichung zu besitzen. Diese muß — wenn man der Wirklichkeit möglichst nahe kommen will — die dauernde Umwandlung von Materie in Strahlung berücksichtigen. Verf. rechnet dafür zwei verschiedene — übrigens bei unserem heutigen Stand der Kenntnisse notwendig in hohem Grade willkürliche — Ansätze durch und zeigt, daß in beiden Fällen die Abhängigkeit des Krümmungsradius von der Zeit sehr verschieden wird. Er warnt deshalb mit Recht vor zu weitgehenden Schlußfolgerungen aus den Feldgleichungen allein, solange die Beziehung zwischen Materie und Strahlung nicht vollständig bekannt ist. *Heckmann* (Göttingen).

Quantentheorie.

● **Boutarie, A.:** Précis de physique d'après les théories modernes. 3. édit. Paris: G. Doin et Cie. 1932. 984 S. Frs. 32.—.

● **Neumann, Johann v.:** Mathematische Grundlagen der Quantentheorie. (Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. C. Runge. Bd. 38.) Berlin: Julius Springer 1932. 262 S. u. 4 Abb. RM. 18.—.

Dieses Buch enthält eine einheitliche Formulierung und Begründung derjenigen mathematischen Begriffe und Schlüsse, in denen sich die Prinzipien der „Quantenmechanik“

darstellen; darüber hinaus erfahren die Möglichkeiten statistischer Interpretationen eine eingehende logische Untersuchung. Der Verf. ist — wohl mit Recht — der Ansicht, daß das Werkzeug einer solchen Darstellung in der Operatorenrechnung im „abstrakten Hilbertschen Raum“ zu suchen ist — die nicht etwa nur in einer mathematischen Präzisierung der Diracschen Symbolik besteht. — In den „einleitenden Betrachtungen“ werden die beiden ursprünglichen Formulierungen der Quantenmechanik entwickelt; ihre Gleichwertigkeit führt zum Begriff des abstrakten Hilbertschen Raumes, in dem sie in gleicher Weise aufgehoben sind. Die Geometrie und Operatorenrechnung dieses Raumes erfährt im nächsten Kapitel eine eingehende Begründung. Insbesondere werden die „Projektionsoperatoren“ in den Vordergrund gestellt, die ein Element des Hilbertschen Raumes — ihm entspricht ein „Zustand“ — in einen Teilraum projizieren. Sie bilden das angemessene Hilfsmittel zur Formulierung des Eigenwertproblems, das sodann entwickelt und in großen Zügen gelöst wird. In der „quantenmechanischen Statistik“ findet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in bestimmtem Zustand eine physikalische Größe in einem gewissen Wertebereich liegt, ihre natürliche Formulierung mit Hilfe von Projektionsoperatoren. Zwanglos ergeben sich die Bedingung für die gleichzeitige Meßbarkeit und die Ungenauigkeitsrelationen. Im „deduktiven Aufbau der Theorie“ werden Gesamtheiten physikalischer Gebilde zugrunde gelegt, für die verschiedene Zustände in Frage kommen, deren Wahrscheinlichkeit durch einen statistischen Operator beschrieben wird. Daraus, daß es keine „streuungslosen“ Gesamtheiten gibt, schließt v. Neumann, daß die Quantenmechanik nicht kausal interpretiert werden kann. In den thermodynamischen Betrachtungen wird insbesondere die Entropie solcher Gesamtheiten berechnet; einige Paradoxien der klassischen Thermodynamik fallen hier fort. Der Schluß ist einer kurzen, aber sehr bemerkenswerten Analyse des Meßprozesses gewidmet. Scharf wird unterschieden zwischen kausalen Zustandsänderungen vermöge der Schrödinger-Gleichung und den akasualen irreversiblen Vorgängen, die durch Meßeingriff entstehen, und es wird untersucht, in welchem Sinne die letzteren durch Einbeziehen der Meßvorrichtung in das physikalische Gebilde den kausalen Vorgängen untergeordnet werden können. — Spezielle Operatoren, spezielle Eigenwertprobleme, wellenmechanische Gesichtspunkte, Anwendungen der Gruppentheorie, Bose- und Fermi-Statistik werden in dem Buch nicht behandelt; konkrete physikalische Fragen werden — abgesehen von der Diracschen Lichtrechnung — kaum berührt. Die Darstellung ist — entsprechend der axiomatischen Aufgabe, die sich der Verf. gestellt hat — außerordentlich abstrakt; doch wird stets versucht, die allgemeinen Begriffe und Formulierungen von den natürlichen Ansätzen aus zu entwickeln und als notwendig zu motivieren.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Császár, Elemér: Zeitliche und wellenmechanische Mittelwerte. Mat. természett. Értes. 196, 185—195 u. dtsh. Zusammenfassung 196 (1932) [Ungarisch].

Seyfarth, Hellmut: Zur relativistischen Quantendynamik des Mehrkörperproblems. Ann. Physik, V. F. 14, 321—341 (1932).

Der Verf. versucht eine Wellengleichung für das relativistische Mehrkörperproblem aufzustellen, in der er neben den Raumkoordinaten für jedes Teilchen auch besondere Zeitgrößen einführt.

O. Klein (Stockholm).

Hönl, H.: Eine Bemerkung zur Zerstrahlungshypothese der Materie. Z. Physik 77, 317—321 (1932).

Es wird ausdrücklich bewiesen, daß (wie nicht zu bezweifeln) ein Prozeß, bei welchem von zwei zusammenstoßenden Teilchen das eine zerstrahlt, das andere übrig bleibt, während nur ein Lichtquant erzeugt wird, hinsichtlich Energie- und Impulsbildung nicht unmöglich ist. — Die angewandte Rechenmethode gestattet andererseits auch eine sehr elegante Ableitung der Compton-Debyeschen Formel: Die Erhaltungssätze $E + E_* = E' + E'_*$; $p + p_* = p' + p'_*$ (E , p auf das Elektron, E_* , p_* auf das Lichtquant bezüglich; die gestrichenen Größen nach dem Prozeß auftretend) benutze man zur Substitution von E' , p' in $E'^2 - c^2 p'^2 = m^2 c^4$. Das ergibt sogleich, wenn man noch den Anfangsimpuls p des Elektrons gleich Null setzt, $E(E_* - E'_*) - E_* E'_* + c^2 p_* p'_* = 0$, was bereits mit $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta)$ identisch ist.

P. Jordan (Rostock).

Heisenberg, W.: Über den Bau der Atomkerne. I. Z. Physik 77, 1—11 (1932).

Es wird versuchsweise eine Theorie der Atomkerne entwickelt auf Grund der Annahme, daß 1. alle Atomkerne nur aus Protonen und Neutronen bestehen, während 2. deren Wechselwirkungen den heute bekannten Gesetzen der Quantenmechanik unterliegen. (Dieser Annahme steht zwar die Tatsache entgegen, daß die Bindungsenergie des Neutrons [= Proton + negatives Elektron] anscheinend klein ist gegenüber den Massendefekten der Kerne; doch sprechen die

Ergebnisse trotzdem für die Nützlichkeit und teilweise Richtigkeit der gemachten Hypothese). Die empirisch gesicherten grundsätzlichen Abweichungen von den Gesetzen der Quantenmechanik werden also als ausschließlich in den am Kernaufbau beteiligten Neutronen konzentriert angenommen, welchen ein Spinnmoment $\frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2\pi}$ und die Gültigkeit der Fermi-statistik zugeschrieben wird. Dann ergibt sich unmittelbar die aus dem empirischen Material schon erschlossene Regel, daß ein Kern, der insgesamt (unter Mitzählung der Neutronen!) eine $\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ Zahl von Protonen enthält, ein $\frac{\text{ganzzahliges}}{\text{halbzahliges}}$ Spinnmoment besitzen und der $\frac{\text{Bosestatistik}}{\text{Fermistatistik}}$ gehorchen muß. — Sind ein Neutron und ein Proton in einem Abstand r voneinander (r von der Größenordnung der Kerndimensionen), so wird ein Platzwechsel der negativen Ladung eintreten mit einer Frequenz $\frac{1}{h} J(r)$. Zwischen zwei Neutronen wird ferner eine Wechselwirkungsenergie $-K(r)$ bestehen, die als eine Anziehung bewirkend angenommen werden darf. Der Verf. berücksichtigt als potentielle Energie in der Hamiltonfunktion eines Kernes neben den $J(r)$ und $-K(r)$ nur noch die Coulomb-Energie zwischen den Protonen sowie den Massendefekt D des Neutrons. Es wird angenommen, daß für normale Werte von r ($< 10^{-12}$ cm) die Ungleichung $J(r) > K(r)$ besteht. Werden nur die Anteile $J(r)$ der potentiellen Energie berücksichtigt, so ergibt sich ein Minimum der Energie für einen Kern gegebenen Atomgewichtes dann, wenn seine Ordnungszahl gleich der Hälfte des Atomgewichtes ist. — Es wird ferner angenommen, daß ein Kern ein β -Strahler ist, wenn seine Ruhmasse größer ist als die Summe der Ruhmassen a) des aus ihm durch β -Zerfall entstehenden Kernes, b) eines Elektrons. Diese Bilanz ist trotz der wahrscheinlichen Ungültigkeit des Energiesatzes beim β -Zerfall (also bei Zerlegung eines Neutrons) scharf definiert. Die Bedingung für das Auftreten eines α -Zerfalls ist ganz die entsprechende (ohne Einführung einer besonderen Hypothese). Für eine bestimmte Ordnungszahl wird ein Kern nur dann stabil sein gegen α - und β -Zerfall, wenn das Verhältnis zwischen der Zahl n_1 seiner Neutronen und der Zahl n_2 seiner unkompensierten Protonen innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, für welche eine rohe Abschätzung ergibt:

$$\frac{n_1}{n_2} = C_1 + C_2 \frac{n_2}{\sqrt[3]{n_1 - n_2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n_1}{n_2} = c_1 + c_2 \frac{n_2}{\sqrt[3]{n_1 - n_2}};$$

die linke Gleichung soll den möglichen Minimalwert von n_1/n_2 , die rechte den Maximalwert von n_1/n_2 bezeichnen. Bei Wahl geeigneter Konstanten C_1, C_2, c_1, c_2 ergeben die Gleichungen ein befriedigendes Bild, obwohl mannigfache feinere Effekte in dieser Behandlungsweise noch unberücksichtigt bleiben. Z. B. ergibt sich leicht die weitere Regel, daß bei ursprünglich gerader Ordnungszahl stets zwei β -Teilchen hintereinander emittiert werden müssen, was auch empirisch der Fall ist.

P. Jordan (Rostock).

Braunbeck, Werner: Über Massendefekt und Bindungsenergie des Neutrons. Z. Physik **77**, 534—540 (1932).

Es wird der Massendefekt eines Neutrons untersucht, welcher sich ergibt, wenn man das Neutron aus zwei konzentrisch angeordneten statischen Ladungsverteilungen von den Dimensionen des klassischen Protonen- bzw. Elektronenradius bestehend ansieht. Der Massendefekt ergibt sich von der Größenordnung mc^2 . G. Beck.

Bethe, H., und E. Fermi: Über die Wechselwirkung von zwei Elektronen. Z. Physik **77**, 296—306 (1932).

Für die relativistische, retardierte Wechselwirkung zweier Elektronen ist einerseits von Breit und andererseits von Möller je eine Formel abgeleitet worden, welche diese Wechselwirkung mit einer bestimmten Annäherung zu bestimmen gestattet. Die von Breit selbst gegebene Ableitung seiner Formel aus der Quantenelektrodynamik wird von den Verff. durch eine andere Ableitung ersetzt, welche einen besseren Vergleich mit dem Näherungsverfahren der Möllerschen Theorie gestattet; ferner wird der bislang fehlende Nachweis erbracht, daß auch die Möllersche Theorie aus der Quantenelektrodynamik abgeleitet werden kann. Die Breitsche Formel wird außerdem auch aus der Möllerschen abgeleitet.

P. Jordan (Rostock).

Gupta, Sisirendu: On the angular momentum and virial equations of the Dirac electron. Indian Phys.-Math. J. **3**, 105—113 (1932).

Verf. betrachtet die aus der Diracschen Theorie des Elektrons folgenden Bewegungsgleichungen für den Impuls \mathfrak{P} , das Impulsmoment $\mathfrak{r} \times \mathfrak{P} + \frac{\hbar}{4\pi} \sigma$ und das

Virial $r \cdot \mathfrak{P}$ (vgl. dies. Zbl. 1, 248) und ersetzt den auf der rechten Seite auftretenden Stromvektor J durch seinen Gordonschen Ausdruck (Zerlegung in sog. Konvektions- und Polarisationsstrom). Die entstandenen Gleichungen werden diskutiert und mit den von Frenkel auf Grund der klassischen Vorstellungen vorgeschlagenen Gleichungen für ein Elektron mit magnetischem und elektrischem Moment verglichen.

V. Fock (Leningrad).

Holtmark, J.: Die Berechnung von Atomfeldern mit Hilfe von Wirkungsquerschnittsmessungen. Norske Vid. Selsk., Forh. 4, 124—127 (1931).

„Aus einer bekannten Winkelverteilungskurve für den Wirkungsquerschnitt eines Atoms (bzw. Moleküls) für Elektronenstrahlen kann man, wenigstens im Prinzip, die Phasenänderungen δ_l für die Kugelwellen verschiedener Ordnung berechnen.“ Die praktische Durchführung hat eine Schwierigkeit darin, daß die Koeffizienten in der zunächst gegebenen Entwicklung nach Produkten von Kugelfunktionen teils positiv, teils negativ und oft größer als die Summe selbst sind. Verf. entwickelt die Intensitätsverteilung nach einfachen Kugelfunktionen und zeigt, daß den neuen Koeffizienten Reihen mit lauter positiven Gliedern entsprechen, aus denen sich die δ_l direkt graphisch berechnen lassen.

Wessel (Coimbra).

Conway, A. W.: The radiation of angular momentum. Proc. Roy. Irish Acad. A, 41, 8—17 (1932).

Verf. versucht, die Terme der Bandenspektren ohne Heranziehung der quantenmechanischen Vorstellungen durch Betrachtung klassisch strahlender Multipole abzuleiten.

V. Fock (Leningrad).

Chalmers, J. A.: Absorption measurements and the continuous spectrum of β -rays. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 319—327 (1932).

Der Verf. versucht die Frage der Intensitätsverteilung in kontinuierlichen β -Strahlspektren zu lösen, indem er aus empirisch bekannten Absorptionskurven von homogenen β -Strahlen und dem Absorptionsgesetz für β -Strahlbündel mit kontinuierlicher Geschwindigkeitsverteilung auf den primären Intensitätsverlauf im kontinuierlichen β -Strahlspektrum schließt. Durch graphische Integration und Diskussion der Abweichungen des Absorptionsgesetzes vom Exponentialgesetz kommt er zu dem Ergebnis, daß es nicht nötig sei, eine diskrete obere Geschwindigkeitsgrenze im β -Strahlspektrum anzunehmen, und daß, wenn x die extrapolierte Reichweite ist, ein Gesetz von der Form $x \cdot e^{-ax}$ für die Reichweitenverteilung im natürlichen kontinuierlichen β -Strahlspektrum maßgebend ist. Dieses Gesetz gilt angenähert in der Nähe der Reichweiten, bei denen das Maximum des Spektrums liegt. Für kleine Reichweiten liegt die wahre Intensität über, für größere Reichweiten unter der durch diese Formel angegebenen Zahl. Aus den Knicken in den Absorptionskurven ist nicht auf eine obere Reichweitengrenze zu schließen, da diese in Besonderheiten des Verlaufs von Absorptionsvermögen mit der Reichweite verursacht sind.

Houtermans (Berlin).

Chalmers, J. A.: Energy problems in the continuous spectra of β -rays. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 328—337 (1932).

Verf. diskutiert die von ihm selbst als unwahrscheinlich bezeichnete Möglichkeit, daß der exponentielle Abfall β -strahlender Substanzen durch Überlagerung von verschiedenen zu gleicher Kernenergie und gleicher Zerfallsenergie gehörigen Zerfallskonstanten unter Annahme entsprechender Gewichtsfunktionen dieser Größen und einer Abhängigkeit der Zerfallswahrscheinlichkeit vom Alter des Atoms zustande kommt. Die von Loeb vorgeschlagene Möglichkeit, daß die beim β -Zerfall auftretenden kontinuierlichen Energiebeträge sich bei je 2 aufeinanderfolgenden β -Emissionen kompensieren, ist aus energetischen Gründen unmöglich. Verf. schlägt zwei Experimente vor, um die Abhängigkeit der Strahlenenergie von der Energie des vorhergehenden β -Zerfalls zu prüfen. Eine sehr schwache Quelle von UX_1 würde in einem magnetischen β -Strahl-Spektrographen, der mit Geiger-Zählern als Empfänger ausgestattet ist, Koinzidenzen innerhalb eines Zeitintervalls Δt zwischen zwei aufeinanderfolgenden

β -Emissionen zeigen, wenn die Quelle so schwach ist, daß die Wahrscheinlichkeit eines neuen Zerfalls von UX_1 während der Zeit Δt klein ist gegen die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls des entstandenen UX_2 -Kerns. Im Falle einer Energieabhängigkeit des zweiten Zerfalls vom ersten müßten systematische Zusammenhänge zwischen der Energie des ersten und zweiten Zerfallsaktes auftreten. Eine weitere Möglichkeit der Untersuchung einer etwaigen derartigen Abhängigkeit bestünde darin, die Zerfallsprodukte der β -Strahlung durch die verschiedene Rückstoßenergie, die diese bei verschiedener Zerfallsenergie erhalten, zu trennen.

Houtermans (Berlin).

Zanstra, H.: Über die Umkehrung gewisser radioaktiver Prozesse. *Z. Physik* **77**, 391—394 (1932).

Die bekannten Klein-Rosselandschen Überlegungen für Stoßprozesse werden auf Kernprozesse angewandt. Aus dem Massenwirkungsgesetz folgt — die Gültigkeit der Thermodynamik für diese Prozesse vorausgesetzt —, daß der für eine Reaktion $A + BC \rightarrow AB + C$ gültige Stoßquerschnitt σ_1 sich zu dem Stoßquerschnitt σ_2 der Umkehrreaktion umgekehrt verhält wie die zugehörigen Stoßenergien.

Houtermans (Berlin).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Eucken, A., und K. Fajans: Empfehlung bestimmter thermodynamischer Formelzeichen seitens der Deutschen Bunsengesellschaft. *Z. physik. Chem. A* **161**, 233—234 (1932).

Hausen, H.: Zur Problemstellung und Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. *Forsch. Ingwes. B* **3**, 203—208 (1932).

Analyse der Aussagen des 2. Hauptsatzes. — Unter Voraussetzung des 1. Hauptsatzes und unter Kenntnis der thermischen und der kalorischen Zustandsgleichung läßt sich eine Differentialgleichung für den integrierenden Nenner des (unvollständigen) Wärmedifferentials aufstellen. Durch diese Gleichung ist aber der integrierende Nenner noch nicht eindeutig festgelegt. Am Beispiel des idealen Gases wird gezeigt, daß der integrierende Nenner z. B. Funktion der Temperatur allein oder des Volumens allein sein kann. Da keiner der integrierenden Nenner ausgezeichnet ist, kann man keine Maßvorschrift für die Entropie vor irgendeiner anderen auszeichnen. Aussage des 2. Hauptsatzes ist es, daß erfahrungsgemäß ein universeller (von den Zustandsgleichungen unabhängiger) integrierender Nenner existiert, der Funktion der Temperatur allein ist und nur einerlei Vorzeichen hat. Aus der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile 2. Art folgt 1. die bekannte Definition der Entropie, die ihrerseits das absolute Temperaturmaß, den Zusammenhang zwischen thermischer und kalorischer Zustandsgleichung usw. einschließt, 2. das Prinzip von der Vermehrung der Entropie.

Eisenschütz (Berlin).

Růžicka, Vlad.: La seconde loi de la thermodynamique s'applique-t-elle à la matière vivante? *Scientia* **52**, 157—166 (1932).

Kimball, W. S., and G. Berry: Entropy, strain, and the Pauli exclusion principle. *Philos. Mag.*, **VII** s. **13**, 1131—1143 (1932).

In Fortsetzung früherer Arbeiten über diesen Gegenstand wird neuerlich ausgeführt, wie sich die thermodynamisch-statistischen Sätze mechanisch interpretieren lassen, wenn man annimmt, daß im Geschwindigkeits- bzw. Impulsraum zwischen den Phasenpunkten der einzelnen Moleküle Newtonsche Kräfte wirken. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik erscheint dann als Satz über das Gleichgewicht zwischen Zwang und Drang (strain und stress), entsprechend der Gleichgewichtsbedingung der Elastizitätstheorie. Das Pauli-Prinzip wird entsprechend dahin gedeutet, daß den Molekülen im Geschwindigkeitsraum eine endliche Ausdehnung zukommt, wodurch sich analoge Verhältnisse ergeben, wie sie im Koordinatenraum durch das von van der Waals eingeführte Eigenvolumen der Teilchen geschaffen werden. Ferner werden die durch

die neueren Statistiken bewirkten Abweichungen von den klassischen Verteilungsformeln in unmittelbare Analogie zu den durch die van der Waalschen Kräfte bewirkten Abweichungen von den idealen Gasgesetzen gebracht. Fürth (Prag).

Robitzsch, M.: Die Wechselbeziehungen zwischen der Abkühlungsgröße eines trockenen und eines feuchten Körpers. Gerlands Beitr. Geophys. **37**, 89—93 (1932).

Köhler, Hilding: Zur Frage der Verdunstung. Erwiderung auf Bemerkungen von A. Wagner. Gerlands Beitr. Geophys. **37**, 37—39 (1932).

(Vgl. dies. Zbl. **3**, 432). Die von Wagner aufgestellte Behauptung, nach des Verf. Ansicht müßten die Ausdrücke für die Verdunstung einerseits im Außenraume, andererseits in der Grenzschicht ineinander übergehen, ist zum mindesten verfrüht. Ferner wurde von Wagner die von Köhler behauptete wesentliche Rolle des Austausches bei der Verdunstung bestritten. Demgegenüber wird auf die Wichtigkeit der Kenntnis der Austauschvorgänge zur Untersuchung der Verdunstung hingewiesen. Haurwitz (Leipzig).

Wagner, A.: Bemerkungen hierzu. Gerlands Beitr. Geophys. **37**, 40 (1932).

Die beiden im vorangehenden Referat angeführten Bedenken werden aufrecht erhalten. Haurwitz (Leipzig).

Langer, Rudolph E.: A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid. Tôhoku Math. J. **35**, 260—275 (1932).

The author shows that several cases of the problem in question, which hitherto have been treated by some authors by means of special devices, can be successfully discussed by well known general methods of the theory of boundary value problems.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Clausing, P.: Eine Bemerkung zu der Molekularströmung. Ann. Physik, V. F. **14**, 129—133 (1932).

Bei der stationären Molekularströmung von Gasen durch Röhren ist die Strömungsintensität q an verschiedenen Stellen des Röhrenquerschnittes verschieden groß; allgemeine Formeln über die Verteilung von q über den Querschnitt sind von Smoluchowski aufgestellt worden. Beschränkt man sich auf zylindrische Röhren, dann kann man das Verhältnis der q für die Achse und die Wand der Röhre in einfacher Weise erhalten, wenn man die Molekularströmung als Diffusion auffaßt, die dem normalen Diffusionsgesetz: $q = -D \cdot dn/dx$ gehorcht, worin D die aus der kinetischen Gastheorie bekannte Gestalt: $D = 1/3 \cdot \lambda u$ hat. Berechnet man für den vorliegenden Fall die freie Weglänge λ der Moleküle einmal für die Achsenströmung und einmal für die Wandströmung, so ergeben sich für q aus dem obigen Ansatz bis auf den Faktor $4/3$ die Smoluchowskischen Formeln und es folgt für das Verhältnis der q in der Achse und an der Wand der richtige Wert $\pi/2$. Fürth (Prag).

Luck, David G. C.: Sound velocity in reactive mixtures of real gases. (Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U.S.A.]) Physic. Rev., II. s. **40**, 440—444 (1932).

Nach Nernst muß die Schallgeschwindigkeit in einem Gemisch chemisch miteinander reagierender Gase eine Dispersion aufweisen, da das Reaktionsgleichgewicht von Druck abhängig ist und sich bei genügend tiefen Frequenzen stets dem Momentandruck entsprechend einstellen wird, bei genügend hohen Frequenzen jedoch nicht, wegen der endlichen Reaktionsgeschwindigkeit. Eine Theorie dieser Erscheinung ist für vollkommen schalldurchlässige Gasgemische von Einstein durchgeführt worden. Der Verf. erweitert diese Theorie, indem er sie auf reale, schallabsorbierende Gase überträgt. Es zeigt sich, daß die Absorption für eine bestimmte Frequenz ein Maximum aufweist, dessen Lage und Höhe mit der Reaktionsgeschwindigkeit zusammenhängt, so daß man durch Absorptionsmessungen auf diese Höhe schließen könnte, vorausgesetzt, daß der Mechanismus so einfach ist, als der Theorie zugrunde gelegt wurde. Für die Dispersion der Schallgeschwindigkeit ergibt sich ebenfalls ein Ausdruck, der für verschwindende Absorption in den Einsteinschen übergeht. Fürth (Prag).